

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 4 月 9 日現在

機関番号：14301

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2009～2013

課題番号：21540175

研究課題名(和文) ランダムシュレディンガー作用素のスペクトルの確率論的研究

研究課題名(英文) Probabilistic study on the spectra of random Schroedinger operators

研究代表者

上木 直昌 (Naomasa, Ueki)

京都大学・人間・環境学研究科(研究院)・教授

研究者番号：80211069

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,500,000円、(間接経費) 1,050,000円

研究成果の概要(和文)：ランダムなポテンシャルをもつシュレディンガー作用素の典型的性質として状態密度関数が指数的に立ち上がることが知られているが、本研究ではこの挙動がランダムネスとポテンシャルの強さに応じてどの様になるかを明らかにした。また更によく知られた性質であるアンダーソン局在の数学的証明を磁場が基本的で自然な確率場であるガウス型確率場となっている場合に一般化した。

研究成果の概要(英文)：One of the typical properties of the random Schroedinger operators is that the density of states decays exponentially. In our work, we reveal the transition of this behavior as the variation of the strength of the randomness and the potential. Another typical more well-known property is the Anderson localization. In our work, we extend the mathematical proof of the existence of this localization to the case that the magnetic field is a Gaussian random field, which is the most fundamental and natural random field.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：基礎解析学

キーワード：確率解析 微分方程式 作用素論 数理物理 ランダムシュレディンガー作用素 スペクトル Wegner
型評価 磁場

1. 研究開始当初の背景

本研究の研究成果は主に次の2つにまとめられる：

- (1) 状態密度関数の立ち上がり方に関する結果
- (2) ランダム磁場によるアンダーソン局在の数学的証明

(1) に関しては1977年に中尾慎太郎(金沢大学)が Donsker-Varadhan の理論によってポアソンモデル、即ちポアソン点配置の各点を中心にポテンシャルを置いたモデルにおいてポテンシャルが非負値でその減衰が早い場合に状態密度関数の最低エネルギーからの立ち上がり方を決定し、これが量子力学的に決まっていることを示した。同年 Pastur (ウクライナ)がポテンシャルの減衰が遅い場合にも決定し、これは古典力学的に決まっていることを示した。更に1981年に大倉弘之(京都工芸繊維大学)が臨界減衰の場合、即ち先の2つの場合の変わり目に相当する場合において立ち上がり方を決定し、これには量子力学的寄与も古典力学的寄与も現れることを示した。更に2次元のポアソンモデルに一樣磁場がかかっている場合には1995年の Broderix, Hundertmark, Kirsch, Leschke (ドイツ)の研究と1999年の, Hupfer, Leschke, Warzel(ドイツ)の研究によってポテンシャルの減衰が遅い場合に決定され、これは古典力学的に決まっていることが示された。同様の設定でポテンシャルの減衰が早い場合に対しては1998年の Erdős(ドイツ)の研究によって決定され、これは量子力学的に決まっていることが示され、臨界減衰の場合に対しては2001年の Erdős の研究によって決定され、これには量子力学的寄与も古典力学的寄与も現れることが示された。また3次元のポアソンモデルに一樣磁場がかかっている場合には2003年に Hundertmark, Kirsch, Warzel がポテンシャルの減衰が遅い場合に決定し、これは古典力学的に決まっていることが示した。同様の設定でポテンシャルの減衰が早い場合については Kirsch, Leschke, Warzel が決定し、これは量子力学的に決まっていることを示したと Kirsch, Metzger (ドイツ) の2007年の解説書で述べられているが証明は公表されていない。ポテンシャルが非正值の場合に対しては1977年に Pastur がマイナス無限大から立ち上がってくる状態密度関数の挙動を決定し、これが古典力学的に決まっていることを示した。

一方、本研究の研究協力者である福島竜輝(京都大学)が2007年頃からポアソンモデルと周期的モデルの中間的な媒質、即ちポテンシャルを格子点からランダムにずらしたモデル(以下ランダム移動モデルと略称)を研究し始め、各ポテンシャルの台がコンパクトの場合に、状態密度関数の最低エネルギーからの立ち上がり方のオーダーを決定し、これは

量子力学的に決まっていることを示し、ポアソンモデルにおけるオーダーがランダムネスの強さに応じてどの様に変遷するかを明らかにしていた。

そこで本研究代表者は福島竜輝と共同でランダム移動モデルにおいてポテンシャルの台がコンパクトでない場合の研究を始め、ポテンシャルの減衰に応じて状態密度関数の立ち上がり方がどの様に変遷するかを明らかにしつつあった。

(2) に関しては2000年に中村周(東京大学)がかなり一般的なランダム磁場において状態密度関数の最低エネルギーからの立ち上がり方が遅いことを示し、2002年に Hislop(アメリカ)と Klopp (フランス)が Wegner 型評価を与え、これがアンダーソン局在の数学的証明につながると述べていたが、当時の Wegner 型評価はベクトルポテンシャルが小さい確率場で摂動されたとき、それによって広がったスペクトルの1部分だけを評価する非常に制限されたものであったのでアンダーソン局在へのつながりは明確にされていなかった。そこで本研究代表者は2008年に特殊なランダム磁場において先の理論がアンダーソン局在の数学的証明に確かにつながっていることを明らかにした。他に対応する離散系のモデルでは2008年に Klopp, 中村周、中野史彦(学習院大学)、野村祐司(愛媛大学)の結果があった。

2010年頃から Erdős, Hasler (ドイツ)が扱えるランダム磁場のクラスを大幅に拡張した。その方法は従来の固有値の確率変数に関する単調増加性によって確率空間上の1回部分積分だけで Wegner 評価を導出する方法ではなく固有値の確率変数に関するヘッシアンの非退化性を示して、確率空間上の2回部分積分によって Wegner 評価を導出する、自然な方法によるものであったが、その非退化性を示すことは難しく、磁場にはまだ特殊な条件が必要であった。

2. 研究の目的

(1)に関しては状態密度関数の最低エネルギーからの立ち上がり方に関するポアソンモデルでの結果をランダム移動モデルに拡張してその立ち上がり方がランダムネスの強さに応じてどの様に変遷するかを明らかにすることである。

(2)に関しては Erdős, Hasler による Wegner 評価とこれによるアンダーソン局在の数学的証明を基本的で自然なガウス型ランダム磁場に拡張することである。

3. 研究の方法

(1)に関しては主に2つの方法がある。一つは状態密度関数の Laplace-Stieltjes 変換を

Feynman-Kac-伊藤の公式を用いて汎関数積分表示し、それを評価する方法、もう一つは Dirichlet-Neumann 法を用いて有限領域上に制限された作用素の最小固有値の評価に帰着する方法である。この2つの方法を基本として、評価のための様々な工夫を加える。

(2)に関してはガウス型確率場に対する Malliavin 解析で培われた方法を用いる。

4. 研究成果

(1)に関して本研究代表者は福島竜輝との共著論文[Ann. Henri Poincaré, 11 (2010)]において次のことを証明した：ランダム移動モデルにおける状態密度関数の最低エネルギーからの立ち上がり方に関して、ポテンシャルが非負値でその減衰が遅い場合にこの立ち上がり方を決定し、これが古典力学的に決まっていることを示した。またポテンシャルの減衰が速い場合にはこの立ち上がり方のオーダーを決定し、これは量子力学的に決まっていることを示した。これは福島が Sznitman の粗視化の方法に基づいて示していたポテンシャルの台がコンパクトの場合の結果の Dirichlet-Neumann の方法による別証明も含んでいる。臨界減衰の場合は部分的に量子力学的寄与が現れることを示した。またポテンシャルが非正值の場合に状態密度関数のマイナス無限大からの立ち上がり方を決定し、これが古典力学的に決まっていることを示した。以上の結果は全てポアソンモデルでの結果がランダムネスの強さに応じて変遷する様子を明らかにしている。

更に続編である本研究代表者と福島竜輝との共著論文 [Journal of Functional Analysis, 260 (2011)] では先の結果と Sznitman の粗視化の方法によりランダム移動モデル上の放物型アンダーソン問題の長時間挙動の評価を与え、アンダーソン局在に關係する間欠性(intermittency)と呼ばれる性質の現れ方を一般論よりも詳しく明らかにした。

次に論文[Markov Processes and Related Fields, 17 (2011)]では2次元と3次元のランダム移動モデルに一樣磁場がかかっているポテンシャルが非負値でその減衰が遅い場合に状態密度関数の最低エネルギーからの立ち上がり方を決定し、これは古典力学的に決まっていることを示した。

更に論文[RIMS Kôkyûroku Bessatsu, B27 (2011)]では同様の設定でポテンシャルの減衰が速い場合に立ち上がり方を評価し、部分的に量子力学的寄与が現れていることを示した。

(2)に関しては論文[Journal of Functional Analysis, 263 (2012)]で Erdős, Hasler による Wegner 評価とこれによるアンダーソン局在の数学的証明を基本的なガウス型確率

場を磁場に持つ場合に拡張した。

論文[数学, 66 (2014)]では以上の結果の大部分について解説した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 6件)

上木 直昌, 確率解析とランダム・シュレディンガー作用素, 数学, 査読有, 66 (2014), 掲載予定

Naomasa Ueki, Wegner estimate for Gaussian random magnetic fields, Journal of Functional Analysis, 査読有, 263 (2012), 2024—2050 DOI: 10.1016/j.jfa.2012.06.021

Naomasa Ueki, Quantum behavior of the integrated density of states for the uniform magnetic field and a randomly perturbed lattice, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, 査読有, B27 (2011), 149—169

Naomasa Ueki, Classical behavior of the integrated density of states for the uniform magnetic field and a randomly perturbed lattice, Markov Processes and Related Fields, 査読有, 17 (2011), 347—368

Ryoki Fukushima and Naomasa Ueki, Moment asymptotics for the parabolic Anderson problem with a perturbed lattice potential, Journal of Functional Analysis, 査読有, 260 (2011), 724—744
Ryoki Fukushima and Naomasa Ueki, Classical and quantum behavior of the integrated density of states for a randomly perturbed lattice, Ann. Henri Poincaré, 査読有, 11 (2010), 1053—1083

[学会発表](計10件)

上木 直昌, Wegner estimate for Gaussian random magnetic fields, 繰りこみ群の数理科学での応用, 2013年9月13日, 京都大学数理解析研究所(京都市)

上木 直昌, Anderson localization in Gaussian random magnetic fields, ランダム作用素のスペクトルと関連する話題, 2012年12月6日, 京都大学大学院人間・環境学研究科(京都市)

Naomasa Ueki, Wegner estimate for Gaussian random magnetic fields, XVII International Congress on Mathematical Physics, 2012年8月8日, オールボー(デンマーク)

上木 直昌, Wegner estimate for Gaussian random magnetic fields, 日

本数学会年会, 2012年3月26日, 東京理科大学神楽坂キャンパス351教室 (東京都新宿区)

上木 直昌, Wegner estimate for Gaussian random magnetic fields, ランダム作用素のスペクトルと関連する話題, 2011年12月1日, 京都大学大学院人間・環境学研究科(京都市)

上木 直昌, Asymptotic behavior of the integrated density of states for the magnetic Schrödinger operators in a 3-dimensional randomly perturbed lattice, ランダム作用素のスペクトルと関連する話題, 2010年12月8日, 慶應義塾大学日吉キャンパス来往舎2階中会議室 (横浜市)

Naomasa Ueki, Asymptotics of IDS for a randomly perturbed lattice, 34th Conference on Stochastic Processes and Their Applications, Poster Session, 2010年9月7-8日, 千里ライフサイエンスセンター (豊中市)

上木 直昌, Lifschitz tails for the uniform magnetic field and a randomly perturbed lattice, ランダム作用素のスペクトルと関連する話題, 2009年12月4日, 京都大学吉田南4号館(京都市)

Naomasa Ueki, Classical and quantum behavior of the integrated density of state for a randomly perturbed lattice (joint work with R. Fukushima), Kochi School on Random Schrödinger Operators, 2009年11月28日, 高知大学理学部 (高知市)

Naomasa Ueki, Asymptotics of IDS for a randomly perturbed lattice (joint work with R. Fukushima), XVI International Congress on Mathematical Physics, Poster Session, 2009年8月4日, プラハ(チェコ)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

上木 直昌 (UEKI, Naomasa)

京都大学・大学院人間・環境学研究科・教授

研究者番号: 80211069

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

なし

(4) 研究協力者

福島 竜輝 (FUKUSHIMA, Ryoki)

京都大学・数理解析研究所・講師

研究者番号: 60527886

高原 純一 (TAKAHARA, Jyunichi)
京都大学・大学院人間・環境学研究科・元
研修員

北垣 芳彦 (KITAGAKI, Yoshihiko)
京都大学・大学院人間・環境学研究科・元
大学院生

上野 靖史 (UENO, Yasufumi)
京都大学・大学院人間・環境学研究科・大
大学院生