科学研究費助成事業　研究成果報告書

平成 ２６ 年　６ 月 １０ 日現在

機関番号：１４３０１
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2009～2013
課題番号：２１５４０１７６

研究課題名（和文）高次元複素力学系における不動点と分岐点の研究

研究課題名（英文）Fixed points and critical points in higher dimensional complex dynamics

研究代表者
上田　哲生（Ueda, Tetsuo）

京都大学・理学（系）研究科（研究院）・教授

研究者番号：１０１２７０５３

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　3,300,000円、（間接経費）　990,000円

研究成果の概要（和文）：高次元複素力学系の問題を主として多変数複素関数論の立場から研究した．特に複素２次元数空間の多項式自己同形写像であるエノン写像が半放物-半吸引型不動点をもつ場合，その分岐によって(充填)ジュリア集合が不連続に変化するインプロージョンの現象を解明した．また複素射影空間の正則自己写像により生ずる力学系に関して，分岐点集合の軌道を追跡することにより，反発周期点が空間全体で稠密となるための条件を明らかにした．

研究成果の概要（英文）：I studied complex dynamics in higher dimension from the point of view of complex analysis of several complex variables. In particular, I investigated the phenomenon of implosion, i.e., the discontinuous change of (filled) Julia set that occur when a semi-parabolic and semi-attracting fixed point of a Henon mapping is perturbed. Also I investigated the dynamics of holomorphic self mappings of complex projective spaces. By tracking the orbit of the critical set, I obtained the condition for the set of repelling periodic points is dense in the projective space.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：複素力学系　放物型不動点　ジュリア集合　インプロージョン　分岐点　ファトゥ集合

１．研究開始当初の背景

(1) 複素１変数の力学系の理論は 20 世紀初頭に Fatou や Julia らによって創始された．そこでは複素数球面が，一つの有理関数の反復合成列の挙動によってファトゥ集合とジュリア集合に二分され，その構造が研究された．ファトゥ集合は軌道が一様な挙動を示す点からなる集合であり，ジュリア集合はカオス的挙動を示す点からなる集合である．この理論は 1980 年代以降，擬等角写像の理論の応用などに伴い新たな発展を見た．それと同時に複素多変数の領域における正則写像の力学系の研究が始まった．中でも重要なものは，複素２次元数空間の多項式自己同形写像の研究と複素射影空間の自己正則写像の力学系である．

(2) エノン(Hénon)写像は 1970 年代に実平面の２次多項式自己同形写像で力学系として複雑な構造をもつ例として与えられたものであるが，Hubbard らはエノン写像を複素領域において考察する研究を提唱した．そこでは複素１次元の場合の多項式写像との類似を追求することが大きな指導原理と考えられ，１次元の場合のジュリア集合，充填ジュリア集合，ファトウ集合の対応物が定義された．Bedford，Smillie はこの研究に複素ポテンシャル論やカレントの理論を応用して著しい成果を得た．また Friedland-Milnor は力学系として複雑な挙動をもつ２変数多項式自己同形写像は一般エノン写像の合成として表わされることを示した．

(3) 研究代表者は複素２次元正則写像の不動点の近傍における局所的挙動の研究を行った．この研究では２次元複素多様体 M の正則自己同形写像 F_0 が不動点 0 をもつとし，不動点における F_0 の微分の固有値の一方が 1でもう一方が絶対値が１より小さい場合(半放物-半吸引型不動点）を考察する．F_0 の反復によってこの不動点に局所一様に吸引される点の全体 B は２次元複素数空間に正則同値な領域となる．また F_0 の逆写像の反復によって 0 に収束する点全体は複素平面からの正則写像の像 Σとして表わすことができる．

(4) 一方，考察する写像がパラメータに依存して変化する場合に，それに伴って（充填）ジュリア集合が如何に変化するかという研究がなされた．特に，Douady，Lavaurs らは 1980-90 年代に，１変数多項式写像の複素力学系の摂動によってジュリア集合や充填ジュリア集合が不連続に変化するインプロージョンの現象の研究した．これは放物型不動点（すなわち微分の固有値が１となる不動点）の摂動によって２つの不動点の組が生ずる場合に写像の反復によってこれらの不動点の間を通過する点の挙動を精密に記述することによって説明される．

(5) 複素１変数の有理関数は複素射影直線の正則自己写像であるが，その自然な一般化として，射影空間の正則自己写像の研究が 1990 年代以降，Hubbard，Papadopol，Fornaess，Sibony，Ueda らによって行われた．ここでもジュリア集合，ファトゥ集合の概念が自然に定義されるが，ジュリア集合が反発周期点の閉包に一致するという１変数の古典的結果はもはや成り立たない．具体的な例としてファトゥ集合が空となる写像に興味があるが，この正則写像の分岐点の軌道に注目してこのような例が構成できることを研究代表者は示した．

２．研究の目的

(1) 研究の第一の目的は複素力学系におけるインプロージョンの現象を複素２次元の場合に解明することにある．すなわち，複素２次元数空間の多項式自己同形写像であるエノン写像 F_0 が半放物型-半吸引型不動点をもつ場合，その摂動によって生ずるエノン写像のジュリア集合と充填ジュリア集合が不連続に変化する現象を，もとの写像 F_0 の吸引領域と漸近曲線上で定義されるファトゥ座標によって表現される内在的構造を用いて説明することを目的とする．

(2) 研究の第二の目的は一般次元の複素射影空間の自己正則写像の反復合成によって生ずる力学系の構造を解明することにある．このような力学系について，ファトゥ集合の一般化であるファトゥ写像の性質を明らかにすること，特に分岐点の軌道が代数的集合に含まれる場合について，ジュリア集合や反発特異点の分布を，写像の分岐点の軌道の挙動とそこから生ずる分岐被覆写像族の性質に基いて解明することを目的とする．

３．研究の方法

(1) １および多変数の複素解析学の方法を適用した．１変数の場合の Douady，Lavaurs らによる方法はリーマン面の一意化定理などの１変数関数論の手法に依存するものであり，２変数の場合にはこの方法を直ちに適用することはできないので，半放物型不動点に対するファトゥ座標を精密に近似するものとして，摂動された写像に対する概ファトゥを構成してファトウ座標がその極限として得られることを示すという手法を開拓した．

(2) 一般の実力学系理論に属する方法としては，微分可能写像の不動点における中心多様体の理論を適用し，漸近曲線が中心多様体として表わされることを用いてその上の点の挙動の解明に役立てた．

(3) 海外共同研究者 Eric Bedford（Indiana

University）および John Smillie（Cornell University）と国内および海外で多数回のセミナーを行って議論を積み重ね，また e-メールで意見を交換して研究を進めた．

(4) 数式処理ソフトウェアを活用することでファトゥ座標や遷移写像の数値計算を実行し，その結果をコンピュータグラフィックスとして視覚化した．これは問題となる現象を考察するための大きな役割を果たした．

４．研究成果

(1)　２次元複素多様体の正則自己同形写像（特に エノン写像）で，半放物-半吸引型不動点をもつものの摂動によるインプロージョンに関する結果について概略を述べる．ここで得られた結果のみならず，そこに至る手法，そのために導入された諸概念が今後の研究の発展のために重要な役割を果たすであろうと考えられるので，このような点についても説明する．

①　２次元複素数空間の多項式写像である一般エノン写像 F に対して，次のような集合を定義する： F の反復合成による正方向軌道が有界となる点の全体を K+，負方向軌道が有界となる点の全体を K- とし，これらの共通部分を K とする．また K+，K- の境界を J+，J- とし，これらの境界を J とする．さらに F の鞍型周期点全体を J* で表わす．これらは，１変数多項式の力学系における充填ジュリア集合 K，ジュリア集合 J に相当する集合である．

これらは閉集合であって，一般に，パラメータとともに K+ は上半連続，J+, J* は下半連続に変化する．

② 一般エノン写像で，半放物-半吸引型不動点を持つもの F_0 を考える．すなわち不動点における微分の固有値の一方が１でもう一方は絶対値が小であるとする．この不動点に関する吸引領域 B は２次元複素数空間と正則同値であり，この領域の上では写像は平行移動と共役である．この共役を与える座標を入射ファトゥ座標とよぶ．またこの写像の逆によって不動点に吸引される点集合 Σ を漸近曲線（不安定曲線）とよぶ．これは複素平面によって一意化され，その上で写像 F_0 は平行移動と共役である．この共役を与える座標を射出ファトゥ座標とよぶ．

吸引領域 B は K+ の内部の連結成分の一つであり，その境界は J+に一致する．また漸近曲線 Σの閉包は J+ に一致する．

この写像を適当な方向に摂動すると，この不動点は２つの鞍型不動点の組に分裂する．以下の目標はこのような摂動に関して K+, J* などの集合の不連続性を明らかにすることにある．

③ 半放物型-半吸引型不動点に対する吸引領域と漸近曲線の構造に関する結果に基いて，遷移写像(transition function) T を定義する．これは写像 F_0 の吸引領域 B から漸近曲線 Σ の上への（複素パラメータαに依存する）正則写像である．これは吸引領域 B におけるファトウ座標を漸近曲線Σにおけるファトウ座標に対応させることで定義される．

本研究における重要な段階はこの遷移写像が，もとの写像 F_0 を適当な方向に摂動して得られる写像の高次の反復合成からなる列の極限として得られることを示すことにある．これは，言い換えれば，摂動された写像の挙動をもとの写像の内在的データによって近似的に説明できることを意味している．

この事実は１変数の場合の Douady- Lavaurs の結果に対応するものであるが，２変数の場合には１変数の場合の有力な手段であったリーマン面の一意化定理を適用することが出来ないので新たな構成法をとる．すなわち，摂動された写像に対してもとの写像のファトゥ座標を精密に近似する概ファトゥ座標を構成し，その極限としてファトゥ座標が得られることを証明する．

④ 吸引領域 B と漸近曲線Σは共通部分をもつので，この遷移写像によって部分的に定義された力学系を定めることができる．この力学系に対してジュリア集合および充填ジュリア集合を定義することができる．これらを(充填)ファトゥ・ラヴォース集合とよぶ．この遷移写像のパラメータαを適当に定めることによって，そのジュリア・ラヴォース集合が充填ジュリア・ラヴォース集合に含まれないようにすることができる．

⑤ 摂動された写像がもとの写像 F_0 に接近する方向を指定するためにα列の概念を定義する．写像がこの方向から接近するときその充填ジュリア集合 K+の列の上極限は，遷移写像により定まる充填ファトウ・ラヴォース集合に含まれ，ジュリア集合 J+ の下極限はファトゥ・ラヴォース集合を含むことを示すことができた．

⑥ 以上のことを総合して，これらの集合の摂動に関して特に次のことが明らかになった：

J*，J，J+，K，K+ は $\varepsilon=0$ において不連続である．一方 J-，K- は連続である．

以上の結果は E. Bedford，J. Smillie，および T. Ueda による共著論文:
“Semi-parabolic Bifurcations in Complex Dimension two”(投稿中)
にまとめられた．

これらの結果は複素２変数空間の多項式自己同形写像で，力学系の立場から本質的に

意味のあるクラスである一般エノン写像からなる族の全体像を解明するための重要な一段階であると考えられる．

(2)　一般次元の射影空間の自己正則写像の反復合成によって生ずる力学系に関する結果について概略を述べる．

① 射影空間の自己正則写像について，その反復合成列が局所同等連続となる点全体をファトゥ集合とよび，その補集合をジュリア集合とよぶ．１次元の場合（すなわち１変数有理関数の場合）にはジュリア集合は反発周期点の集合の閉包に一致するという事実はジュリアおよびファトゥの古典的結果であるが，２次元以上の場合にはこれは一般には成り立たない．

②一般次元の場合に，ファトゥ集合の概念を拡張してファトゥ写像を定義することができる．複素多様体から射影空間への正則写像φ が（与えられた自己写像 f に関して）ファトゥ写像であるとは，φと f の反復の合成からなる写像列が局所同等連続であることをいう．このファトゥ写像の考察が以下の研究に有用であることが明らかになった．

③一般次元の写像で反発周期点が射影空間において稠密に存在するための一つの十分条件を与えるために，写像の分岐点集合に注目する．射影空間の自己正則写像は射影空間からそれ自身の上への分岐被覆であり，その分岐点集合は余次元１の代数的集合である．分岐点集合の軌道が空間内の代数的集合に含まれるとき，この写像は有限分岐的(critically finite) であるという．これは言い換えれば，反復合成写像列が射影空間の一定の代数的集合の上でのみ分岐する分岐被覆写像族をなすことである．この被覆写像族の分岐の位数が有界であるとき，強有限分岐的(strictly critically finite)であるという．

④主要な結果として，次のことが明らかになった：

(i) 強有限分岐的写像においては，周期点はすべて反発的であり，それらは空間内で稠密である．

(ii) 強有限分岐的写像においては，非定数ファトゥ写像は存在しない．

(iii) ２点以上を含む連結コンパクト集合の上ではこの反復合成写像列は一葉収束部分列を含まない．

(iv) 空間内の任意の点の反復合成による逆像全体は空間内で稠密である．特に，完全不変な閉集合は空集合と空間全体以外には存在しない．

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　１件）

1. Tetsuo Ueda, Critically finite maps on projective spaces (II), 数理解析研究所講究録 1762, 2111, pp120-124.　査読有

〔学会発表〕（計　７件）

1. 上田哲生, Critically finite maps on projective spaces, 複素力学系とその周辺分野の研究, 2010 年 12 月 9 日, 京都大学数理解析研究所

2. 上田哲生, Semi-parabolic implosion in complex dimension 2 (Part 1), 多変数関数論京都シンポジウム XIV, 2011年7月20日, 京都大学

3. 上田哲生, Semi-parabolic implosion in complex dimension 2,(Part 1), Interactions between continuous and discrete holomorphic dynamics, 2012 年 7 月 11 日, Banff International Research Station, Banff, Canada

4. 上田哲生, Semi-parabolic fixed points and their Bifurcations in complex dimension 2, Abel Symposium, 2013 年 7 月 2 日, Trondheim, Norway

5. 上田哲生, 複素２次元半放物型不動点とその分岐, 日本数学会秋季総合分科会函数論分科会特別講演, 2013 年 9 月 13 日, 愛媛大学

6. 上田哲生, Holomorphic maps on projective spaces and Fatou maps, Moduli spaces and self-maps, 2014 年 3 月 6 日, 京都大学数理解析研究所

7. 上田哲生, Dynamics of holomorphic maps in higher dimension, Japan-Nepal Joint Workshop: Around higher dimensional complex systems, 2014 年 3 月 10 日-13 日, Kirtipur, Nepal

６．研究組織

(1) 研究代表者

上田　哲生（UEDA, Tetsuo）
京都大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：10127053