

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 5 月 27 日現在

機関番号：15101

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2009～2012

課題番号：21540180

研究課題名（和文）可解り一群の表現の構成と非可換フーリエ解析

研究課題名（英文）Constructions of representations of solvable Lie groups and non-commutative Fourier analysis

研究代表者

井上 順子（INOUE JUNKO）

鳥取大学・大学教育支援機構・准教授

研究者番号：40243886

研究成果の概要（和文）：リー群における非可換フーリエ変換について、主に次の観点から研究を行った。指数  $p$  ( $1 < p \leq 2$ ) とその共役指数  $q$  に対して、 $L^p$  フーリエ変換は群上の  $L^p$  関数の空間から群のユニタリ双対上の作用素値  $L^q$  空間への有界線型写像として定義されるが、この写像のノルムの決定は調和解析の基本的な問題の 1 つである。本研究では  $\mathbf{R}^n$  のコンパクト拡大で得られる群に対してノルムを決定した。また、一般の連結冪零リー群に対して、ノルムの上からの評価を与えた。次に、非可換フーリエ変換を  $C^*$  群環からユニタリ双対上の有界作用素場のなす  $C^*$  環への準同型写像とみなす観点から研究を行い、ある 6 次元の可解り一群の例において変換の像の構造を解析する試みを始めた。

研究成果の概要（英文）：This research mainly concerns non-commutative Fourier transforms on Lie groups from the following viewpoints. For an exponent  $p$  ( $1 < p \leq 2$ ) and its conjugate  $q$ , the  $L^p$ -Fourier transform is defined to be a bounded operator from the space of  $L^p$ -functions on the group to the  $L^q$ -space of operator fields on the unitary dual; the determination of its norm is one of the main problems of harmonic analysis. We obtained the norm for the groups defined by compact extensions of  $\mathbf{R}^n$ . We also obtained an estimate of the norm for general connected nilpotent Lie groups. Next, we have treated the Fourier transform as a homomorphism from the  $C^*$ -algebra of the group to the  $C^*$ -algebra of bounded operator fields over the unitary dual, and began trying to analyze the image of the Fourier transform on a certain example of six dimensional solvable Lie group.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	700,000	210,000	910,000
2010年度	600,000	180,000	780,000
2011年度	600,000	180,000	780,000
2012年度	600,000	180,000	780,000
年度			
総計	2,500,000	750,000	3,250,000

研究分野：表現論

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：関数解析、リー群の表現論、ユニタリ表現、フーリエ変換、非可換調和解析、冪零リー群、可解り一群

1. 研究開始当初の背景

冪零および可解り一群の表現論は、その起

源において数理解論に深い関わりを持ち、また変換群の表現論・調和解析として幾何学的にも重要である。可解リー群の表現論においては、Kirillov の創始した「軌道の方法」(orbit method)により、I 型可解リー群の既約ユニタリ表現の構成が与えられ、基礎の枠組みが形成された。しかし、実際に調和解析における様々な問題へ応用するためには、例えば群環の表現、特に非可換フーリエ変換の構造解析などにおいてさらに精密な情報が必要であり、複雑なユニタリ双対を調べる上での技術的な問題とも関わって多くの課題がある。

## 2. 研究の目的

冪零リー群、および指数型可解リー群において、群の既約ユニタリ表現が引き起こす群環の表現および非可換フーリエ変換を軌道の方法に基づいて構成・記述し、詳しい構造解析を行う。具体的には $L^p$ フーリエ変換の作用素としてのノルムを求める問題やフーリエ変換による $C^*$ 群環の像の解析を中心に扱う。また、これらの過程で得られる知見を用いて、例えば様々な誘導表現の構成に関わる問題や、可解リー群以外のクラスのリー群のフーリエ変換の解析に関する問題への応用を目指す。

## 3. 研究の方法

連結単連結冪零リー群、さらに一般に指数型可解リー群の既約ユニタリ表現は、軌道の方法により群の余随伴軌道に対応付けられ、各既約表現は、実 polarization からの誘導を経て等質空間上の二乗可積分関数のなすヒルベルト空間上に実現される。これに基づいて、群環の表現をこのヒルベルト空間における積分作用素の形で表示し、作用素の挙動を調べる。続いて群環の元に対して群のユニタリ双対上の作用素場を対応させる写像(非可換フーリエ変換)を構成する。上記の、群の余随伴軌道と群のユニタリ双対との対応は同相写像であることが知られており、ユニタリ双対は余随伴軌道の空間と位相空間として同一視することができる。これにより、非可換フーリエ変換を余随伴軌道上の作用素場として記述し、余随伴軌道の幾何的情報を用いて解析を進める。

冪零リー群等、群がユニモジュラーである場合は、ユークリッド空間の調和解析の類似・一般化として、一般の可解リー群の場合より精密な結果が期待できる。この観点から本研究ではユニモジュラーな群に対しては $L^p$ 空間のフーリエ変換の解析を取り上げる。

一方、一般の指数型可解リー群においては、フーリエ変換の挙動は極めて複雑なものとなり、技術的にも多くの準備が必要となる。例えば、冪零リー群の場合と異なり、各既約

表現において、コンパクト台を持つ連続関数に対応する作用素が必ずしもコンパクト作用素とは限らないため、コンパクト作用素に変換される関数を特徴づけるための適切な方法を見出すことが新たに問題となる。

これらを踏まえて、研究の遂行においては、リー群のユニタリ表現論・非可換調和解析および関連分野の情報を得るため、国内では表現論シンポジウム、RIMS 研究集会、実関数論・函数解析学合同シンポジウム等の研究集会に参加した。海外では 2009 年および 2011 年にチュニジアで開催された

Tunisian-Japanese Conference “Geometric and Harmonic Analysis on Homogeneous Spaces and Applications”、2012 年にフランスの CIRM で開催された研究集会

“Harmonic Analysis, Operator Algebras and Representations” に出席し、研究発表を行った。また、ロレーヌ大学(フランス)およびスファックス大学(チュニジア)の表現論の研究者・研究グループの訪問、当該研究者の短期間の招聘等により研究交流を進めた。

## 4. 研究成果

(1) ユークリッド空間における調和解析において基本的な Hausdorff-Young 定理は、 $\mathbb{R}^n$  上の  $L^p$  関数のフーリエ変換の像が  $\mathbb{R}^n$  上  $q$  乗可積分な関数であり、その  $L^q$  ノルムが元の関数の  $L^p$  ノルムで上から押さえられることを示す不等式である。ここで  $1 < p \leq 2$ 、 $q$  は  $p$  の共役指数とする。これは Kunze により、局所コンパクト、ユニモジュラー群上の非可換フーリエ変換に対して一般化され、 $L^p$  フーリエ変換を群上の関数の  $L^p$  空間から群のユニタリ双対上の作用素値可測場の  $L^q$  空間への有界線型写像として定義することができる。

一方、ユークリッド空間上の調和解析では Hausdorff-Young 不等式の精密化、言い換えれば、 $L^p$  関数の空間から  $L^q$  関数の空間への有界線型写像としてのフーリエ変換のノルムを求めることが次の段階の基本問題となるが、この問題は Beckner により完全に解決された。これに対して非可換フーリエ変換においては、ノルムの決定は未解決の問題である。

冪零リー群のクラスでは、連結かつ単連結な群に対してこれまで様々な形のノルム評価が行われている。そのうち、連結かつ単連結な冪零リー群全体を対象とし 1 と 2 の間の全ての  $p$  に関する結果としては、Baklouti - Smaoui - Ludwig により、群の次元と余随伴軌道の次元の最大値と指数  $p$  を用いた上からの評価が得られた。一方、単連結でない場合に関する評価値はあまり知られていない。このことを踏まえ、本研究では、単連結とは限らない一般の連結冪零リー群を対象とした。この群を普遍被覆群の離散部分群による商

群として表し、Kirillovの軌道の方法により実polarizationからの誘導を経由して既約表現を実現し、Plancherel公式および $L^p$ フーリエ変換を具体的に表示する。そして、連結かつ単連結な冪零リー群に対する上記Baklouti - Smaoui - Ludwigの結果を応用することにより、一般の場合に、群の位相的な情報と群のユニタリ双対の構造上の情報、具体的には群の中心に含まれる極大なコンパクト部分群の次元と普遍被覆群の余随伴軌道の次元の最大値、および指数 $p$ を用いてノルムの上からの評価を与えた。

特別な場合として Heisenberg 群の離散部分群による商群に対しては、Russo による同様の評価があるが、本研究の結果は一般の冪零リー群と1と2の間の範囲にある全ての指数 $p$ を対象にするものである。

この結果はスファックス(Sfax)大学(チュニジア)のBaklouti氏と共同研究の形で得られたものであり、論文③にまとめ発表した。

(2) 次に、対象とする群を可換群  $\mathbb{R}^n$  のコンパクト拡大、即ち、 $\mathbb{R}^n$  とコンパクト群の半直積群として $L^p$ フーリエ変換のノルムを調べた。Mackey理論に基づきコンパクト拡大の既約表現を構成し、Kleppner - LipsmanによるPlancherel定理を用いてPlancherel公式および $L^p$ フーリエ変換を具体的に表示する。そしてFournier - Russo による、積分作用素のSchattenノルムに関するHausdorff-Young型不等式を用いて $L^p$ フーリエ変換のノルムを上から評価し、次の結果を得た：「 $\mathbb{R}^n$  とコンパクト群の半直積群における  $L^p$  フーリエ変換のノルムは、 $\mathbb{R}^n$  における通常の  $L^p$  フーリエ変換のノルムに等しい。」また、 $\mathbb{R}^n$  上のGaussian 関数とコンパクト部分群上の定数関数のテンソル積により得られる関数は、極値関数、即ち作用素ノルムを与える関数である。

一般に、半直積群に対しては、KleinとRussoにより、 $p$ の共役指数 $q$ が偶数の場合に、 $L^p$ フーリエ変換のノルムの上からの評価が得られている。これは、半直積を構成する因子におけるそれぞれの $L^p$ フーリエ変換のノルムの積を用いたものであり、 $\mathbb{R}^n$  のコンパクト拡大に適用すれば、 $q$ が偶数の場合は、ノルムは $\mathbb{R}^n$  の  $L^p$  フーリエ変換のノルム以下であることが導かれる。これに対して本研究結果は1と2の間の範囲にあるすべての $p$ に対するものであり、また、上からの評価値でなくノルムの値が求められているという2点に意義がある。

本結果はスファックス大学のBaklouti氏と共同で行った研究の成果であり、論文②で発表した。

(3) 続いて、 $\mathbb{R}^n$ の非コンパクトな群拡大の例

として、平面のユークリッド運動群の普遍被覆群の場合を調べた。この場合もMackey理論に基づいて既約表現を構成し、積分作用素に関するFournier - RussoのHausdorff-Young型不等式を用いて $L^p$ フーリエ変換のノルムを上から評価した。そして、平面のユークリッド運動群の普遍被覆群における $L^p$ フーリエ変換のノルムは $\mathbb{R}^2$ の $L^p$ フーリエ変換のノルムで上から評価される、という結果を得た。

共役指数 $q$ が偶数である場合に限れば、第(2)項で述べたKleinとRussoの結果の方が良い評価を与えるが、本結果は1と2の間の範囲にある全ての $p$ に対して成り立つものであるという点では意義がある。

本結果もスファックス大学のBaklouti氏と共同で行った研究の成果であり、論文②で発表した。

(4) 一般に群上の可積分関数に対して定義される非可換フーリエ変換は、群の $C^*$ 環からユニタリ双対上の有界作用素場のなす $C^*$ 環への準同型写像を引き起こす。この対応は単射であり、 $C^*$ 群環を群の双対上の(適当な条件を満たす)有界作用素場のなす $C^*$ 環の形で記述できることになる。この観点から非可換フーリエ変換の像を決定・記述し $C^*$ 群環の構造解析を行うことは基本的な問題である。

指数型可解リー群においては、軌道の方法により群のユニタリ双対を群の余随伴軌道の空間と同一視し、フーリエ変換の像を余随伴軌道の空間の上の作用素場として記述することができる。このとき特に余随伴軌道の空間の位相が良く分かっている群では、これまでに幾つかの例で実際に構造解析が行われている。例えば冪零リー群ではHeisenberg群やthread-like群に関するLudwig - Turowskaの結果、冪零でない指数型リー群では $ax+b$ 群に関するLin - Ludwigの結果などがある。しかしながら、一般には余随伴軌道の空間の位相構造は非常に複雑であり、このためフーリエ変換の像の具体的な構造解析は困難なものとなっている。

この問題に関して本研究では、ロレーヌ(Lorraine)大学のLudwig氏と国立東華大学(National Dong Hwa Univ.)のLin氏と共同で研究を行い、より複雑な群を取り扱うための準備として、これまでにフーリエ変換像が調べられていない群の中から、ある6次元の指数型可解リー群を例として取り上げて、その余随伴軌道の空間の位相を調べ、フーリエ変換の像を記述し構造解析を行う試みを始めた。この空間の位相はこれまでに調べられてきた上記の群の場合より複雑であり、フーリエ変換像の記述も複雑なものとなる。この共同研究については2012年10月にCIRMでの研究集会“Harmonic Analysis, Operator Algebras and Representations”において、

当時における結果の中間報告を行った。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計3件)

① 井上 順子, Lie 群上の  $L^p$ -Fourier 変換における Hausdorff-Young 不等式について, 数理解析研究所講究録 1825 巻, 2013, 69 - 74, (査読無)

② Ali Baklouti and Junko Inoue, On the norm of the  $L^p$ -Fourier transform on compact extensions of  $\mathbf{R}^n$ , Forum Math., 掲載予定, DOI:10.1515/forum-2011-0094 (査読有)

③ Ali Baklouti, Junko Inoue, Estimate of the  $L^p$ -Fourier transform norm for connected nilpotent Lie groups, Adv. Pure Appl. Math., 2010, Vol. 2, No. 3-4, 467-483, DOI: 10.1515/apam.2011.001 (査読有)

[学会発表] (計12件)

① Junko Inoue, The Fourier transform of the  $C^*$ -algebra of a solvable Lie group: An example, Conference “Harmonic Analysis, Operator Algebras and Representations”, 2012年10月23日, CIRM, Luminy, FRANCE

② 井上 順子, Lie 群上の  $L^p$ -Fourier 変換における Hausdorff-Young 不等式について, RIMS 研究集会「表現論と非可換調和解析の展望」, 2012年6月20日, 京都大学数理解析研究所, 京都市

③ 井上 順子, A. Baklouti, Lie 群上の  $L^p$ -Fourier 変換のノルムについて, 日本数学会 2012 年度年会, 2012年3月29日, 東京理科大学, 東京都

④ 井上 順子, 群上の  $L^p$ -Fourier 変換のノルムについて:  $\mathbf{R}^n$  のコンパクト拡大の場合, 2011 年度表現論ワークショップ, 2011年12月25日, 鳥取県立生涯学習センター 県民ふれあい会館, 鳥取市

⑤ Junko Inoue, The norm of the  $L^p$ -Fourier transform on compact extensions of  $\mathbf{R}^n$ , 2nd Tunisian-Japanese Conference “Geometric and Harmonic Analysis on Homogeneous Spaces and Applications”, 2011年12月16日, El Mouradi Palace Hotel, Port Elkantaoui, Sousse, TUNISIA

⑥ Junko Inoue, Weak polarizations and holomorphically induced representations of exponential Lie groups, Seminar at Sfax University, 2011年3月16日, Sfax University, Sfax, TUNISIA

⑦ 井上 順子, 群上の  $L^p$ -Fourier 変換のノルムについて, 2010 年度表現論ワークショップ, 2010年12月27日, 鳥取県立生涯学習セ

ンター 県民ふれあい会館, 鳥取市

⑧ 井上 順子, 冪零 Lie 群における  $L^p$ -Fourier 変換について, 日本数学会 2010 年度年会, 2010年3月26日, 慶應義塾大学, 横浜市

⑨ 井上 順子, ベキ零 Lie 群における  $L^p$ -Fourier 変換について, 2009 年度表現論ワークショップ, 2009年12月25日, とりぎん文化会館, 鳥取市

⑩ Junko Inoue, Estimate for the norm of the  $L^p$ -Fourier transform on nilpotent Lie Groups, JSPS-MHESRT Seminar “Geometric and Harmonic Analysis on Homogeneous Spaces”, 2009年11月5日, Kerkennah, Sfax, TUNISIA

⑪ Junko Inoue,  $C^\infty$ -vectors of irreducible unitary representations of exponential Lie groups, Seminar at Sfax University, 2009年9月30日, Sfax University, Sfax, TUNISIA

⑫ 井上 順子, 可解 Lie 群における既約表現のある  $C^\infty$ -ベクトルの特徴付けと群上の Fourier 解析, 第 48 回実函数論・函数解析学合同シンポジウム, 2009年8月5日, 松本市中央公民館, 松本市

#### 6. 研究組織

##### (1) 研究代表者

井上 順子 (INOUE JUNKO)

鳥取大学・大学教育支援機構・准教授

研究者番号: 40243886

##### (2) 研究分担者

( )

研究者番号:

##### (3) 連携研究者

( )

研究者番号: