様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成２４年６月１１日現在

機関番号：１５４０１
研究種目：基盤研究（Ｃ）
研究期間：２００９　～　２０１１
課題番号：２１５４０１８２
研究課題名（和文）　２次元全領域における走化性方程式の研究

研究課題名（英文）Study on a chemotaxis equation in the two-dimensional whole space

研究代表者
永井　敏隆（NAGAI TOSHITAKA）
広島大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：４０１１２１７２

研究成果の概要（和文）：走化性の数学モデルである単純化 Keller－Segel 方程式（放物型楕円型方程式系）を臨界現象が起こる空間２次元全領域で考え、その方程式に対する初期値問題の非負解について時間大域的存在、一意性、有界性、時間無限大での挙動について考察した。まずマイルド解の時間局所的存在・一意性・正則性を確立した。次に劣臨界の場合に、初期データに空間遠方での減衰条件を課さないで非負解の時間大域的存在及び減衰評価を与え、また前進自己相似解への時間無限大での漸近と収束の速さを与えた。

研究成果の概要（英文）：We considered a simplified Keller-Segel equation (parabolic-elliptic system) in the two-dimensional whole space, which is a mathematical model of chemotaxis, and studied the global existence, uniqueness, boundedness and large-time behavior of nonnegative solutions to the Cauchy problem of the equation. We first established the local existence in time, uniqueness and regularity of mild solutions. In the subcritical case, we showed the global existence in time and decay estimates of nonnegative mild solutions without decay conditions of initial data, and then the convergence to a forward self-similar solution and convergence rates.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００９年度	800,000	240,000	1040,000
２０１０年度	700,000	210,000	910,000
２０１１年度	700,000	210,000	910,000
年度			
年度			
総　計	2,200,000	660,000	2,860,000

研究分野：関数方程式
科研費の分科・細目：数学・基礎解析学
キーワード：非線形編微分方程式、走化性方程式、Keller-Segel 方程式、時間大域解、減衰評価、前進自己相似解、漸近挙動

１．研究開始当初の背景

細胞性粘菌等の走化性を記述するために Keller と Segel は、1970 年にモデル方程式として細胞性粘菌の密度に関しては拡散項と移流項からなり誘因化学物質の濃度に関しては拡散項と反応項からなる放物型方程式系（Keller－Segel 方程式と呼ぶ）を提唱した。単純化 Keller－Segel 方程式は、誘因化学物質の拡散係数が非常に大きいとして誘因化学物質に関する反応拡散方程式を単純化して得られる移流拡散方程式とポアソン方程式からなる放物型楕円型方程式系で

ある。
空間 2 次元全領域における単純化 Keller－Segel 方程式に対する初期値問題について、非負解の総質量は時間に関して不変でその大きさは非負解の時間大域的存在や解の挙動に大きな影響を与える。非負解の総質量が臨界値 8π より大きい（優臨界）場合、非負解は有限時間で爆発する可能性があり、有限時間で爆発する非負解は、爆発時刻でデルタ関数的なふるまいをする。
解の総質量が臨界値 8π より小さい（劣臨界）場合、Blanchet-Dolbeault-Pertham（2006 年）は非負解のエントロピーと２次モーメントの有限性の仮定の下で、非負解のエントロピーと内部エネルギーからなる自由エネルギーの時間に関する非増加性や対数型 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式等を利用しエネルギー法を用いて非負な弱解の時間大域的存在を示した。ただし非負な弱解の一意性は彼らの論文で明らかにされていない。
空間 2 次元全領域における単純化 Keller－Segel 方程式は自己相似変換に関して不変であることより、前進自己相似解の存在が期待される。有界で可積分な非負前進自己相似解は劣臨界の場合にのみ存在し、その前進自己相似解は球対称である。球対称非負解の前進自己相似解への収束は Biler-Karch-Laurencot-Nadzieja (2006 年)により示された。球対称と限らない非負解に対して、Blanchet-Dolbeault -Pertham（2006 年）は、非負解のエントロピーと２次モーメントの有限性の仮定の下で、エントロピー法を用いて非負な時間大域的弱解の前進自己相似解への時間無限大での L^1 収束を示した。
非負な弱解の一意性は未解決問題で、また劣臨界の場合に非負解にエントロピーと２次モーメントの有限性を仮定しないで、
・非負解の時間大域的存在を示すこと、
・前進自己相似解への時間無限大での L^p 収束および収束の速さを決定すること
等の問題が残る。
非負解の総質量が臨界値 8π（臨界）の場合、非負解のエントロピーと２次モーメントの有限性の仮定の下で、Blanchet-Carrillo-Masmoudi（2008 年）は非負弱解の時間大域的存在を示し、更にその弱解は総質量 8π のデルタ関数に時間無限大で近づくことを示した。劣臨界の場合と同様に、エントロピーと２次モーメントの有限性を仮定しないで非負解の時間大域的存在については未解決である。臨界の場合、有界で可積分な正値定常解の族が存在し、それらの定常解は球対称である。Biler-Karch-Laurencot-Nadzieja (2006 年）は球対称非負解に対しリャプノフ関数を導入し、球対称で非負な時間大域解が定常解に時間無限大で収束するための球対称初期データのクラスを与えた。

２．研究の目的
空間２次元全領域における単純化 Keller－Segel 方程式に対する初期値問題について、下記を解決することを目的とする。

（１）非負解の総質量が劣臨界値と臨界値の場合に、非負解のエントロピーと２次モーメントの有限性を仮定しないで、非負解の時間大域的存在を示すこと。

（２）非負解の総質量が劣臨界値の場合に、非負解のエントロピーと２次モーメントの有限性を仮定しないで、前進自己相似解への時間無限大での L^p 収束およびその収束の速さを決定すること。

３．研究の方法
空間２次元全領域における単純化 Keller－Segel 方程式に対する初期値問題について、弱解に対して一意性は明らかでないので、弱解の代わりに一意性が成り立つクラスの解としてマイルド解を考える。

（１） 非負解の時間大域的存在。
劣臨界や臨界の場合、エネルギー法を用いる際に、非負解のエントロピーと２次モーメントの有限性があれば自由エネルギーや対数型 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式が有効に働く。それらの有限性を仮定しないでエネルギー法で証明しようとすると、誘因化学物質の方程式がポアソン方程式であることより誘因化学物質が空間遠方で対数的に増大すること等から解析に困難が生じる。それらの困難を克服するために、
・一般化自由エネルギーの導入、
・空間２次元全領域を有界領域と空間遠方に分割し解をそれぞれ評価する、
・ポアソン方程式の解に対する BMO 評価の活用、
・Brezis-Merle の不等式の活用
等の方法を用いる。
次に、エネルギー法以外の方法として関数の再配列理論を適用する。非負解の空間変数に関する再配列を考えることで、比較原理が成り立つ空間１次元での非線形放物型方程式への問題に帰着させる。劣臨界の場合、球対称な前進自己相似解と比較することで非負解の評価を導き、時間大域的存在を示すとともに減衰評価を与える。

（２） 前進自己相似解への時間無限での収束およびその収束の速さ。

非負解のエントロピーと２次モーメントの有限性を仮定しないのでエントロピー法は有効でない。劣臨界の場合に関数の再配列理論を適用することで、球対称な前進自己相似解の減衰評価から導かれる非負解の減衰評価を活用して、スケーリング法により非負解の前進自己相似解への収束を示すとともに収束の速さを与える。

４．研究成果

一意性が不明な弱解の代わりにマイルド解について考え、初期データに可積分性のみを仮定して、マイルド解の時間局所的存在、一意性、正則性および非負初期データに対するマイルド解の非負性を確立した。以下、非負解として非負なマイルド解を考える。

（１） 劣臨界の場合に、非負解の時間大域的存在に関して、非負初期データに有限２次モーメントよりも弱い減衰条件の下で、「３．研究の方法」で述べられているエネルギー法を用いて時間大域的存在を示した。次に、非負初期データに可積分のみを仮定し、関数の再配列理論を適用して、

・非負解の L^p ノルム($1\leqq p\leqq\infty$)は、総質量が非負解の総質量と同じである球対称前進自己相似解の L^p ノルムを超えることはない、

・非負解の時間大域的存在、

・非負解の L^p ノルム($1\leqq p\leqq\infty$)は時間無限大で $t^{-1+1/p}$ の速さで減衰する

を示した。この減衰の速さは、空間２次元における熱方程式の解の減衰と同じである。

（２） 劣臨界の場合、前進自己相似解への時間無限大での収束およびその収束の速さに関して、スケーリング法により次の結果を得た。

・非負な時間大域解は、時間無限大で総質量が非負解の総質量と同じである球対称前進自己相似解に L^p ($1\leqq p\leqq\infty$) 収束し，その収束は $t^{-1+1/p}$ より速い。

前進自己相似解への収束に関する研究の副産物として、

・総質量が 8π より小さい原点における非負デルタ関数を初期値とする非負弱解は球対称な前進自己相似解に限る

を得た。

劣臨界の場合に非負初期データに可積分のみを仮定して、非負解の時間大域的存在、減衰評価、前進自己相似解への収束およびその収束の速さの決定等の成果を得た。この研究により、劣臨界の場合、細胞性粘菌の密度に関する移流拡散方程式において走化性を表す移流項よりも拡散項がより強く働き解は熱方程式の解のようにふるまうことが分かる。この研究で得られた知見は、空間２次元全領域における Keller－Segel 方程式（放物型方程式系）で自己相似変換で不変なものに対して研究を進める際の指針となりえる。

臨界の場合については今後の研究課題である。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計４件）

1. <u>Toshitaka Nagai</u>, Global existence and decay estimates of solutions to a parabolic-elliptic system of drift-diffusion type in R^2, Differential Integral Equations, 査読有, 24, 2011, 29-68

2. <u>Toshitaka Nagai</u> and Takayoshi Ogawa, Brezis-Merle inequalities and application to the global existence of the Cauchy problem of the Keller-Segel system, Commun. Contemp. Math, 査読有, 13, 795-812, 2011

3. <u>Toshitaka Nagai</u>, Convergence to self-similar solutions for a parabolic-elliptic system of drift-diffusion type in R^2, Adv. Differential Equations, 査読有, 16, 839-866, 2011

4. <u>Toshitaka Nagai</u>, Global Solvability for a chemotaxis system in R^2, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, 査読有, B15, 2009, 101-111

〔学会発表〕（計１５件）

1. <u>永井敏隆</u>、Dynamics of solutions to a chemotaxis model in R^2 with critical mass, 北九州における偏微分方程式研究集会、2011年11月26日、北九州市

2. <u>Toshitaka Nagai</u>, A parabolic-elliptic system of drift-diffusion type with critical mass in R^2, International Workshop on Modeling and Analysis of PDE Systems of Biological Processes, 18 Oct 2011, Beijing China

3. <u>永井敏隆</u>、関数の再配列の走化性方程式への応用、2011年度日本数学会秋季総合分科会函数方程式論分科会、2011年10月1日、松本市

4. <u>Toshitaka Nagai</u>, A parabolic-elliptic system of drift-diffusion type with subcritical mass in R^2, Nonlinear Models in Partial Differential Equations, 14 July 2011, Toledo Spain

5. <u>永井敏隆</u>、A parabolic-elliptic system of

drift-diffusion type in R^2 for the subcritical case, 流体と気体の数学解析、2011年7月8日、京都市
6. Toshitaka Nagai, A parabolic-elliptic system of drift-diffusion type in two space dimensions for the critical mass case, Workshop on Nonlinear Partial Differential Equations, 9 May 2011, Madrid Spain
7. Toshitaka Nagai, Convergence to self-similar solutions for a parabolic-elliptic system of drift-diffusion type in R^2, Sino-Chilean Conference on Nonlinear Partial Differential Equations and Nonlinear Analysis, 8 Dec 2011, Wuhan China
8. 永井敏隆、Convergence to self-similar solutions for a parabolic-elliptic system of drift-diffusion type in R^2, 北九州における偏微分方程式研究集会、2010年11月13日、北九州市
9. 永井敏隆、A parabolic-elliptic system of drift-diffusion type in two dimensions with subcritical initial data, 新潟偏微分方程式研究会、2010年10月10日、新潟市
10. Toshitaka Nagai, A parabolic-elliptic system of drift-diffusion type in two dimensions with subcritical initial data, The 8th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, 26 May 2010, Dresden Germany
11. 永井敏隆、Convergence to self-similar solutions for a parabolic-elliptic system of drift-diffusion type in two dimensions, 第8回偏微分方程式ワークショップ、2010年3月28日－3月30日、長崎県壱岐市
12. 永井敏隆、走化性方程式の臨界現象、2010年度日本数学会年会、2010年3月26日、横浜市
13. 永井敏隆、Global existence and decay estimates of solutions to a parabolic-elliptic system of drift-diffusion type, 北九州における偏微分方程式研究集会、2009年11月28日、北九州市
14. 永井敏隆、非局所項を持つ 2 次元非線形放物型方程式の時間大域解の存在及び減衰評価、応用解析研究会、2009年11月21日、東京都
15. 永井敏隆、走化性方程式の数学解析、九州非線形偏微分方程式冬の学校, 2009年11月6日, 7日、福岡市

６．研究組織
(1)研究代表者
永井　敏隆（NAGAI TOSHITAKA）
広島大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：４０１１２１７２

(2)研究分担者

なし

(3)連携研究者

なし

(4)研究協力者
山田　哲也（YAMADA TETSUYA ）
広島大学・大学院理学研究科・特任助教