

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年 3月31日現在

機関番号：15401

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2009 ～ 2011

課題番号：21540183

研究課題名（和文） 楕円型偏微分方程式のポテンシャル論的研究

研究課題名（英文） Potential theoretic study of elliptic partial differential equations

研究代表者

下村 哲 (SHIMOMURA TETSU)

広島大学・大学院教育学研究科・准教授

研究者番号：50294476

研究成果の概要（和文）：変動指数をもつルベグ空間やソボレフ空間は非線形偏微分方程式を考察するのに有用な関数空間である。これらの関数空間は、弾性学や電気流動学の研究に関連して重要であることがわかってきた。本研究では、変動指数をもつ Orlicz-Morrey 空間における Hardy-Littlewood の極大作用素の有界性を導き、その応用として、変動指数をもつ Orlicz-Morrey 空間に属する関数のリースポテンシャルのソボレフの不等式や Trudinger 指数積分不等式について新しい知見を得た。

研究成果の概要（英文）：Variable exponent Lebesgue spaces and Sobolev spaces were introduced to discuss nonlinear partial differential equations with non-standard growth condition. These spaces have attracted more and more attention in connection with the study of elasticity and electrorheological fluids. In this research, we studied the boundedness of the Hardy-Littlewood maximal operator on Orlicz-Morrey spaces with variable exponents. As an application of the boundedness of the maximal operator, we establish a generalization of Sobolev's inequality and Trudinger's exponential inequality for Riesz potentials of functions in Orlicz-Morrey spaces with variable exponents.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	1,400,000	420,000	1,820,000
2010年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2011年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：実解析

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：ソボレフ関数、楕円型偏微分方程式

1. 研究開始当初の背景

ソボレフ空間は古典的にはユークリッド空間において定義されてきた。しかし、一般の距離空間上でのソボレフ関数の研究が、微分幾何学やグラフ上の解析学などへの応用

を念頭に、Martio、Koskela、Heinonen、Kilpeläinen らフィンランド学派を中心に精力的に進められ、さらなる学際的かつ国際的な進歩が期待されている。

また、21世紀に入って、電気流動学や弾性学などへの応用を念頭において、変動指数をもつ偏微分方程式の考察とそのための関数空間の理論が重要であることがわかってきた。変動指数をもつ Orlicz 空間 $L^{p(\cdot)}$ ($\log L$) $^{q(\cdot)}$ や変動指数をもつ Morrey 空間などの関数空間の研究はまだ知られていないことが多く、今後この方向の研究がますます重要になっていくものと考えられる。

2. 研究の目的

- (1) 電気流動学や弾性学などへの応用のために、ソボレフ空間だけでなく、変動指数をもつ Orlicz 空間、Morrey 空間、Campanato 空間などの関数空間においてソボレフ型定理を進展させ、ソボレフ関数の正則性を調べる。
- (2) 偏微分方程式論、多様体上の微分幾何学やグラフ上の解析学などへの応用のために、距離空間上においてソボレフ型定理を進展させ、ソボレフ関数の正則性を調べる。
- (3) 自己相似集合に代表されるフラクタルを境界にもつ領域におけるソボレフ関数の境界挙動を調べる。
- (4) 非線形楕円型偏微分方程式の解の性質、ペロン法による非線形ディリクレ問題を調べる。

3. 研究の方法

平成21年度は、研究代表者は、研究分担者が研究打ち合わせを行えるよう日程の調整をした。主として、変動指数をもつ Orlicz 空間や Morrey 空間などの関数空間におけるソボレフ型定理を進展させていく研究などを行った。変動指数をもつ関数空間および距離空間上の関数空間に関する研究（水田）、非線形楕円型偏微分方程式の解の研究（小野）を分担して行った。

平成22年度以降は、研究代表者が、研究

分担者が研究打ち合わせを行えるよう日程の調整をした。主として、距離空間上の変動指数をもつ Orlicz-Morrey 空間におけるソボレフ型定理に関する研究などを行った。変動指数をもつ Orlicz-Morrey 空間におけるソボレフ型定理に関する研究（水田）、非線形ディリクレ問題の研究（小野）を分担して行った。

4. 研究成果

(1) 一般化された Morrey 空間や変動指数をもつ Morrey 空間において、Hedberg の方法を用いることにより、ソボレフの不等式、Trudinger 指数積分不等式と二重指数積分不等式に関する成果を得た。変動指数をもつ Morrey 空間に属する関数のリースポテンシャルの連続性についても結果を得た。これらの研究から、ソボレフ空間だけでなく、Morrey 空間の解析の重要性を再認識できた。

(2) 変動指数をもつ Orlicz 空間において、Hedberg の方法を用いることにより、ソボレフの不等式、Trudinger 指数積分不等式、Hardy の不等式に関する成果を得た。1 に近づく変動指数をもつ場合も扱い、ソボレフの不等式に関する成果を得た。Orlicz 空間に属する関数のリースポテンシャルの連続性についても結果を得た。これらの研究から、ソボレフ空間だけでなく、Orlicz 空間の解析の重要性を再認識できた。

(3) 1 に近づく変動指数をもつ $L^{p(x)}$ 空間における極大関数の可積分性に関する Hästö や二村-水田の研究に続き、より一般的な変動指数をもつ $L^{p(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)}$ 空間における極大関数の可積分性を調べた。変動指数はある領域上で1に近づくので、結果は領域の形状や変動指数が1に近づく速さに依存する。領域

の形状を Minkowski content の概念を用いて設定し、変動指数 $p(\cdot)$ の条件を弱めることによる極大関数の可積分性への影響を考察した。

(4) Morrey ポテンシャルの Trudinger 指数積分不等式を示した Serrin の結果の拡張として、一般化された Morrey 空間 $L^{1,p}$ に属する関数のリースポテンシャルに対する Trudinger 型指数積分不等式やソボレフの不等式に関する結果を示した。

(5) Orlicz 空間を一般化した空間である Musielak-Orlicz 空間に属する関数のポテンシャルに対する容量についての基本的な性質を調べた。球に対する容量の評価を与え、その評価の応用も与えた。

(6) p -Laplace 方程式 ($1 < p < \infty$) に低階項を加えたタイプの非線形偏微分方程式

$$-\operatorname{div}(|\operatorname{grad} u(x)|^{p-2} \operatorname{grad} u(x)) + B(x, u) = 0 \cdots \textcircled{1}$$

に対するポテンシャル論的研究を行った。右辺にラドン測度 μ を含む非線形偏微分方程式

$$-\operatorname{div}(|\operatorname{grad} u(x)|^{p-2} \operatorname{grad} u(x)) + B(x, u) = \mu \cdots \textcircled{2}$$

を考え、 μ がある増大条件を満たすとき、方程式②の解の Hölder 連続指数が具体的に決定できることを示し、その応用として、方程式①の Hölder 連続解に対する除去可能集合がハウスドルフ測度で特徴づけられることを示した。これは、Kilpelainen と Zhong (2002) によって示された低階項が無い場合の拡張にあたる。さらに、方程式②の解の勾配の可積分性も示した。また、 μ がある増大条件を満たすとき、重み $w(x)$ 付き非線形偏微分方程式

$$-\operatorname{div}(w(x)|\operatorname{grad} u(x)|^{p-2} \operatorname{grad} u(x)) + B(x, u) = \mu$$

の解の Hölder 連続指数が具体的に決定でき、低階項が無い重み $w(x)$ 付きの場合を扱った Makalainen (2008) の結果の一部も拡張できることを報告した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 22 件)

1. F. - Y. Maeda, Y. Mizuta, T. Ohno and T. Shimomura, Capacity for potentials of functions in Musielak-Orlicz spaces, *Nonlinear Anal.* **74**, no. 17, (2011), 6231-6243. 査読有

doi:10.1016/j.na.2011.06.003

2. Y. Mizuta, E. Nakai, T. Ohno and T. Shimomura, Sobolev's inequality for Riesz potentials in Orlicz-Musielak spaces, *Proceedings of the International Symposium on Banach and Function Spaces III* (Kitakyushu, Japan, 2009), 409-419, 2011. 査読有

3. Y. Mizuta, E. Nakai, T. Ohno and T. Shimomura, Riesz potentials and Sobolev embeddings on Morrey spaces of variable exponents, *Complex Vari. Elliptic Equ.* **56**, No. 7-9, (2011), 671-695. 査読有
DOI:10.1080/17476933.2010.504837

4. P. Harjulehto, P. Hästö, Y. Mizuta and T. Shimomura, Iterated maximal functions in variable exponent Lebesgue spaces, *Manuscripta Math.* **135**, (2011), 381-399. 査読有 DOI: 10.1007/s00229-010-0421-x

5. Y. Mizuta, E. Nakai, T. Ohno and T. Shimomura, Hardy's inequality in Orlicz-Sobolev spaces of variable exponent, *Hokkaido Math. J.* **40**, (2011), 187-203. 査読有

<http://projecteuclid.org/DPubS?service=UI&version=1.0&verb=Display&handle=euclid.hokmj/1310042827>

6. Y. Mizuta, T. Ohno and T. Shimomura, Weighted Orlicz-Riesz capacity of balls, *Proc. Amer. Math. Soc.* **138**, (2010), 4291-4302. 査読有

doi:10.1090/S0002-9939-2010-10510-5

7. Y. Mizuta and T. Shimomura, Sobolev's inequality for Riesz potentials of functions in Morrey spaces of integral form, *Math. Nachr.* **283**, (2010), No.9, 1336-1352. 査読有

doi:10.1002/mana.200710122

8. Y. Mizuta, E. Nakai, T. Ohno and T. Shimomura, Boundedness of fractional integral operators on Morrey spaces and Sobolev embeddings for generalized Riesz potentials, *J. Math. Soc. Japan* **62**, No. 3, (2010), 707-744. 査読有

DOI:10.2969/jmsj/06230707

9. P. Hästö, Y. Mizuta, T. Ohno and T. Shimomura, Sobolev inequalities for Orlicz spaces of two variable exponents, *Glasgow Math. J.* **52** (2010), 227-240. 査読有 doi:10.1017/S0017089509990292

10. T. Futamura, Y. Mizuta and T. Shimomura, Integrability of maximal functions and Riesz potentials in Orlicz spaces of variable exponent, *J. Math. Anal. Appl.* **366** No. 2, (2010), 391-417. 査読有

Doi:10.1016/j.jmaa.2010.01.053

11. Y. Mizuta, T. Ohno, T. Shimomura and N. Shioji, Compact embeddings for Sobolev spaces of variable exponents and existence of solutions for nonlinear elliptic problems involving the $p(x)$ Laplacian and its critical exponent, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.* **35** (2010), 115-130. 査読有

doi:10.5186/aasfm.2010.3507

12. Y. Mizuta and T. Shimomura, Continuity properties for Riesz potentials of functions in Morrey spaces of variable exponent, *Math. Inequal. Appl.* **13** (2010), 99-122. 査読有 doi:10.7153/mia-13-08

13. Y. Mizuta, T. Ohno and T. Shimomura, Sobolev embeddings for Riesz potential spaces of variable exponents near 1 and Sobolev's exponent, *Bull. Sci. Math.* **134** (2010), 12-36. 査読有

doi:10.1016/j.bulsci.2009.09.004

14. F-. Y. Maeda, Y. Mizuta and T. Ohno, Approximate identities and Young type inequalities in variable Lebesgue-Orlicz spaces $L^{p(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)}$, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.* **35** (2010), 405-420. 査読有

doi:10.5186/aasfm.00

15. T. Futamura, P. Harjulehto, P. Hästö, Y. Mizuta and T. Shimomura, Variable exponent spaces on metric measure spaces, More progresses in analysis (ISAAC-5, Catania, 2005, Begehr and Nicolosi (ed.)), World Scientific, 2009, 107-121. 査読有 doi:10.1142/9789812835635_0010

16. T. Futamura, Y. Mizuta and T. Shimomura, Integrability of maximal functions in Orlicz spaces of variable exponent, 数理解析研究所講究録, 1669, (2009), 37-51. 査読無

<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/1669-03.pdf>

17. Y. Mizuta, T. Ohno and T. Shimomura, Sobolev's inequality for Orlicz-Sobolev spaces of variable exponents, 数理解析研究所講究録, 1669, (2009), 91-102. 査読無

<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/1669-08.pdf>

18. Y. Mizuta, T. Ohno and T. Shimomura, Integrability of maximal functions for generalized Lebesgue spaces $L^{p(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)}$, Proceedings of the Conference on Potential Theory and Stochastics in Albac: Aurel Cornea Memorial Volume, (2009), 193-202. 査読有

19. L. Diening, P. Harjulehto, P. Hästö, Y. Mizuta and T. Shimomura, Maximal functions in variable exponent spaces: limiting cases of the exponent, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.* **34** (2009), 503-522. 査読有

<http://www.acadsci.fi/mathematica/Vol34/DieningHarjulehtoHastoMizutaShimomura.html>

20. Y. Mizuta and T. Shimomura, Continuity properties of Riesz potentials of Orlicz functions, *Tohoku Math. J.* **61** (2009), 225-240. 査読有

doi:10.2748/tmj/1245849445

21. Y. Mizuta, T. Shimomura and T. Sobukawa, Sobolev's inequality for Riesz potentials of functions in non-doubling Morrey spaces, *Osaka J. Math.* **46**(2009), 255-271. 査読有 http://projecteuclid.org/DPubS/Repository/1.0/Disseminate?view=body&id=pdf_1&andle=euclid.ojm/1235574047

22. T. Ono, On solutions of quasilinear elliptic equations with general structure, 数理解析研究所講究録, 1669 (2009) 144-147. 査読無

<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/1669-13.pdf>

[学会発表] (計 11 件)

1. 下村 哲, Iterated maximal functions in variable exponent Lebesgue spaces, 日本数学会秋季総合分科会 (信州大学), 2011 年 9 月 30 日.

2. 下村 哲, Exponential integrability of Riesz potentials of Orlicz functions, ポテンシャル論研究集会 (岐阜大学), 2011 年 11 月 5 日.

3. 小野太幹, 重み付き準線形楕円型方程式の解のヘルダー連続性について, ポテンシャル論研究集会 (岐阜大学), 2011 年 11 月 5 日.

4. 下村 哲, Orlicz-Sobolev capacity of

balls, 日本数学会春季総合分科会 (慶応大学), 2010年3月24日.

5. 下村 哲, Sobolev inequalities for variable exponent Orlicz spaces, 第49回実函数論・函数解析学合同シンポジウム (東京理科大学), 2010年8月2日. (招待講演)

6. 下村 哲, Weighted Sobolev inequality in Musielak-Orlicz space, ポテンシャル論研究集会 (大分大学), 2010年11月5日.

7. Y. Mizuta, Maximal functions in variable exponent Lebesgue spaces, Real Analysis Symposium 2010, Kyushu Institute of Technology, November 12-14, 2010.

8. T. Shimomura, Sobolev inequalities in variable exponent Orlicz spaces, International Workshop on Potential Theory in Hokkaido 2009 (Hokkaido University, Department of Mathematics), September 2, 2009.

9. 下村 哲, Maximal functions in variable exponent spaces: limiting cases of the exponent, 日本数学会秋季総合分科会 (大阪大学), 2009年9月27日.

10. Y. Mizuta, Sobolev's embeddings for Riesz potential spaces of variable exponents, The International Symposium on Banach and Function Spaces 2009, Kyushu Institute of Technology, September 14--17, 2009.

11. T. Ono, Removable sets for continuous solutions of quasilinear elliptic equations with lower order terms, International Workshop on Potential Theory in Hokkaido 2009 (Hokkaido University, Department of Mathematics), September 1, 2009.

[その他]

6. 研究組織

(1) 研究代表者

下村 哲 (SHIMOMURA TETSU)
広島大学・大学院教育学研究科・准教授
研究者番号: 50294476

(2) 研究分担者

水田 義弘 (MIZUTA YOSHIHIRO)
広島工業大学・工学部・教授
研究者番号: 00093815

小野 太幹 (ONO TAKAYORI)
福山平成大学・福祉健康学部・准教授
研究者番号: 60289270

(3) 連携研究者