

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年5月25日現在

機関番号：17401

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2009～2011

課題番号：21540191

研究課題名（和文）非線形偏微分方程式系における解軌道の複雑性解析

研究課題名（英文）Complexity analysis on orbits of solutions
of nonlinear partial differential equations

研究代表者

内藤 幸一郎（NAITO KOICHIRO）

熊本大学・大学院自然科学研究科・教授

研究者番号：10164104

研究成果の概要（和文）：離散的準周期軌道の再帰不確定性を上、下の再帰的次元の差である GAP 値により評価を行い、カオスの複雑さの指標である位相的エントロピーと GAP 値との関係よりその予測不能性を明らかにした。多重準周期軌道については、extremal 数とその2乗数の組みを無理数周波数の組みとしてもつ準周期的離散力学系について、その再帰的次元の GAP 値が正の値をとる条件を導くことによりその予測不能性を示した。

研究成果の概要（英文）：We show nondeterministic recurrent properties of discrete quasi-periodic orbits by estimating the GAP values between upper and lower recurrent dimensions. We also show the relations between the GAP values and the topological entropy, which indicates its chaotic complexity, and then we clarify its unpredictability. We show the unpredictability of the quasi-periodic orbits with multi-frequencies, which are an extremal irrational number and its square, by estimating the positive gaps of their recurrent dimensions.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	1,500,000	450,000	1,950,000
2010年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2011年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総計	3,500,000	1,050,000	4,550,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：関数方程式、準周期性、フラクタル次元、再帰性、ディオファントス近似

1. 研究開始当初の背景

カオスに代表される複雑現象の定量的、定性的解析を目的として、これまで様々な手法や指標が提案されている。エントロピー、リヤプノフ指数、フラクタル次元等、カオス軌道のランダム性、安定-不安定性や複雑性を計る様々な指標がそれぞれ種々多様な形式で導入されている。力学系分野におけるカオス解析の近年のめざましい発展に対して、非線

形偏微分方程式系で表される数理モデルに対しては、安定-不安定多様体の理論や KAM 理論の応用、アトラクター解のフラクタル次元解析等、幾何的理論に基づく定性的解析に次元解析などの若干の定量的解析は成されているが、力学系分野の発展を十分反映しているとはいえない状況にある。

これまでの代表者の研究で、離散的軌道の複雑さの度合いを計る指標として再帰的次

元の GAP 値を導入した。上と下の再帰的次元を軌道の近傍への再帰時間を利用して、 $\varepsilon \rightarrow 0$ の上極限、下極限により定義し、上極限と下極限の差を次元の GAP として定義した。この GAP の値が正のときには再帰時間の不定性が現れると理解されるため、GAP 値を軌道の予測不能性を表す指標として提案している。2007 年に代表者は円写像によって与えられる離散力学系の再帰的次元の GAP 値に対し、無理数回転数のディオファントス定数による理論評価式を与えるとともに数値的な実験検証を行っている。さらに 2008 年には、一般的な記号力学系において位相的エントロピーの値が上と下の再帰的次元の間に挟まれる不等式を示した。この不等式から、下の再帰的次元が正であればエントロピーが正、つまり系がカオス的となることが導かれるので、カオス性と再帰性の関連を明示する強力な道具立てが得られたといえる。

準周期無理数振動数のディオファントス条件と KAM トーラスの摂動安定性や崩壊に深い関連があることはよく知られている。代表者は、無理数振動数の組に対して「拡大公倍数」と呼ばれる代数的な関係を新たに導入し、ディオファントス条件との関連を示し、複数の無理数振動数をもつ準周期的軌道の GAP 値に対して、「拡大公倍数」とディオファントス条件に現れるパラメータによる不等式評価を得ている。

2. 研究の目的

記号力学系における位相的エントロピーの値が上と下の再帰的次元の間に挟まれる不等式評価は本研究の出発点となる結果であり、数論と記号力学系の理論における今後の研究展開の中では特に、「ガウス写像で与えられる離散力学系の複雑性解析」を最重要課題の一つとしている。

力学系分野におけるカオス解析の近年のめざましい発展に対して、非線形偏微分方程式系で表される数理モデルに対しては、安定-不安定多様体の理論や KAM 理論の応用、アトラクター解のフラクタル次元解析等、幾何的理論に基づく定性的解析に次元解析などの若干の定量的解析は成されているが、力学系分野の発展を十分反映しているとはいえない状況にある。非線形偏微分方程式系で表される数理モデルの中で、安定-不安定多様体の理論が適用できる双曲型のモデルにおいては、ホモクリニック軌道の存在が複雑なカオス軌道を描くことが知られており、安定軌道と不安定軌道が極めて複雑に錯綜する「フラクタル構造」を示すことが明らかにされているが、これらの結果では、カオス解の存在を導くことが主であり、定量的な複雑性解析は十分になされていない。このため、本研究では代表者によって得られた上下の再

帰的次元の GAP 値やエントロピーとの不等式関係を利用した定量的複雑性解析の研究を非線形偏微分方程式系における複雑解の解軌道に対しても行うことも主な目的とする。

3. 研究の方法

記号力学系の理論を主研究テーマとする研究グループ及び非線形偏微分方程式の研究グループとの最新研究情報の交流の場を通して協同研究を行うとともに、理論的な解析で得られた手法を応用した計算機実験解析による研究を並行して行うことにより研究を進めた。

代表者のこれまでの研究から、無理数振動数の組の代数的な性質が準周期軌道の安定、不安定性や予測不能性と深く関連することが明らかにされた。さらに最近の研究で得られた上下の再帰的次元とエントロピーの関係を表す不等式をもとにして、記号力学系の理論を基礎とする離散力学系の複雑性定量解析において今後より発展的な手法を確立することを目指している。このため代表者は代数分野の研究者である分担者角田氏及び連携研究者城本氏の協力のもとに、代表者のこれまでの研究で導入された「無理数の分類」や「拡大公倍数」と呼ばれる代数的な性質や上述の不等式に関連した記号力学系についての理論解析を進展させる研究を進めた。すでに、代表者は、円の写像で与えられる離散力学系において上と下の再帰的次元の GAP 値を数値的に解析する手法を開発し、実験的な解析を行っている。計算機支援環境の構築に詳しい分担者角田氏の協力のもとで、離散軌道の再帰的次元の GAP 値の数値的検証についてさらに厳密な実験解析を進めるために、新たな機器やソフトウェアの導入を行った。

代表者が世話人の一人として定期的に参加している偏微分方程式の研究に関するセミナーは、熊本大学での「応用解析セミナー」と九州大学での「関数方程式セミナー」がある。分担者三沢氏は熊本大学でのセミナーの中心的な世話人であり、非線形偏微分方程式に関する最新の研究情報交流の場をこれまで提供してきた。本研究においてもこれらのセミナーを中心とした最新の研究情報交流によって研究の新たな展開を指向した。

4. 研究成果

21 年度までの代表者の研究では連分数展開列の不規則性を直接証明するのではなく、展開列に再帰性などのある種の規則性が有る場合には超越数となることを証明する方向で研究が進められた。研究論文リスト⑧の論文では、連分数展開列の挙動をガウス写像による記号力学系の挙動として捉え、線形的な再帰性を有する連分数列を与える無理数は超越数となることを再帰的次元を用いて

解析している。代表者のこれまでの研究から、3次以上の代数的無理数の連分数展開列の不規則性（2次の場合は周期的に対して）についての理論的解析が、今後の複雑性解析において最も重要かつ困難な課題を含むことが示されている。研究論文リスト⑤の論文では、概周期性を示す記号力学系の挙動解析を位相的エントロピーの評価を通して行うことにより、再帰性とエントロピーの関係を導いている。さらに無限個記号の記号列への拡張も行い、リュウビル数由来の擬スツルム列の再帰的次元のGAP値が正値をとることを評価することにより、その予測不能性を示した。さらに研究論文リスト③の論文では多重ディオファントス近似評価を用いることにより、extremal数とその2乗数の組みを無理数周波数の組みとしてもつ準周期的離散力学系について、その再帰次元のGAP値が正の値をとる条件を導いた。これらの条件は、extremal数由来のレヴィ定数と代表者が導出した拡大公倍数由来の定数との関係の評価することにより導かれた。

非線形偏微分方程式の複雑解に関する研究活動は分担者三沢氏を含むグループと共同で定期的に開催している「熊本大学応用解析セミナー」を通して行い、講演発表要旨を収録した研究報告集を本年も印刷発行した。分担者三沢氏は、非線形双曲型方程式の複雑解解析の基礎となる線形波動方程式に関する研究結果を論文リスト②、④の論文で発表している。

連携研究者城本氏は極めて複雑性の高い量子暗号理論に取り組んでおり、論文リスト⑥、⑦、図書リスト①、②がその成果である。これらの結果は今後の代表者の複雑性に関する研究展開に大きく関連することが予想される。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計8件)

- ① Koichiro Naito, Predictability and unpredictability of quasi-periodic dynamical systems, 京都大学数理解析研究所講究録, 掲載決定, 査読無, 2012.
- ② Chiara Leone, Masashi Misawa, and Anna Verde, A global existence result for the heat flow of higher dimensional H-system, Journal de Mathematiques Pures et Appliquees 97, 査読有, 2012, 282-294.
- ③ Koichiro Naito, Recurrency and unpredictability of quasi-periodic orbits estimated by simultaneous Diophantine approximations, 京都大学数理解析研究所講究録 1755, 査読無, 2011, 103-109.

④ T. Kobayashi, M. Misawa, S. Okamura, Decay Property for the linear wave equations in two dimensional exterior domains, Differential and Integral Equations 24, 査読有, 2011, 941-964.

⑤ Koichiro Naito, Entropy and recurrent dimensions of discrete orbits given by almost periodic sequences, Proc. of 6th International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis 6, 査読有, 2010, 205-221.

⑥ M. Ota, K. Shiromoto, H. Kumazawa, and .S. Usuda, Formula of channel matrix for coded quantum signals by classical linear codes over Z_m , Proc. International Symposium on Information Theory and Its Applications 2010, 査読有, 1035-1040.

⑦ T. S. Usuda and Keisuke Shiromoto, Analytical expression of s-th power of Gram matrix for group covariant signals and its application, Quantum Communication, Measurement and Computation, AIP Conference Proceedings, 査読有, 2010, 3-28.

⑧ Koichiro Naito, Entropy and recurrent dimensions of discrete dynamical systems given by the Gauss map, Proc. of the Asian Conference on Nonlinear Analysis and Optimizations 1, 査読有, 2009, 227-239.

[学会発表] (計3件)

① Koichiro Naito, Predictability and Unpredictability of quasi-periodic dynamical systems, 京都大学数理解析研究所共同研究集会「非線形解析学と凸解析学の研究」2011.8.29, 京都大学(京都).

② Keisuke Shiromoto, Codes over rings and matroids, CanaDAM 2011.6.3, Univ. of Victoria, Viatoria, CANADA.

③ Koichiro Naito, Quasi-periodicity and recurrency of discrete orbits given by simultaneous continued fractions, 京都大学数理解析研究所共同研究集会「非線形解析学と凸解析学の研究」2010.8.31, 京都大学(京都)

[図書] (計2件)

① Keisuke Shiromoto, Ios Press, "Information Security, Coding Theory and Related Combinatorics", Quantum jump codes and related combinatorial designs, 2011, 285-311.

② 城本啓介 他7名共著, オーム社, "暗号とセキュリティ", 2010 神保雅一(編集), 8-30.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

内藤 幸一郎 (NAITO KOICHIRO)
熊本大学・大学院自然科学研究科・教授
研究者番号：10164104

(2) 研究分担者

三沢 正史 (MISAWA MASASHI)
熊本大学・大学院自然科学研究科・教授
研究者番号：40242672

角田 法也 (KADOTA NORIYA)
熊本大学・大学院自然科学研究科・講師
研究者番号：80185884

(3) 連携研究者

城本 啓介 (SHIROMOTO KEISUKE)
熊本大学・大学院自然科学研究科・教授
研究者番号：00343666