

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年 5月26日現在

機関番号：24506

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2009～2011

課題番号：21540194

研究課題名（和文） 熱方程式に対する基本解の漸近展開とその応用

研究課題名（英文） An asymptotic expansion of the fundamental solution to the heat equation and its applications

研究代表者

岩崎 千里（IWASAKI CHISATO）

兵庫県立大学・大学院物質理学研究科・教授

研究者番号：30028261

研究成果の概要（和文）： 熱方程式，特に退化した熱方程式の基本解を擬微分作用素の手法を使ってそれぞれの場合に応じて構成することにより、以下のことが示せた。(1) 局所指数定理が一般の Dirac 作用素についても成立すること(2) フォッカープランク作用素に対する基本解の完全な形の構成とそれを使った固有函数展開を得ること(3) Nilmanifold 上に自然に定義される退化した作用素のスペクトラルゼータ函数の特異点が唯一であること

研究成果の概要（英文）： The following three facts are shown through the construction of the fundamental solution to degenerate parabolic equations by means of the method of calculus of pseudo-differential operators: (1) Local index theorem holds for the Dirac Operators. (2) One can construct the fundamental solution in the exact form, which can be applied to obtain the eigenfunction expansions of the Fokker Planck operator. (3) The spectral zeta function of the degenerate operator, which is defined naturally on Nilmanifolds, has the only one singularity.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2010年度	800,000	240,000	1,040,000
2011年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総計	2,900,000	870,000	3,770,000

研究分野： 数物系科学

科研費の分科・細目： 数学、 基礎解析学

キーワード： 放物型偏微分方程式、基本解、擬微分作用素、リー群、指数、フォッカープランク方程式、固有函数展開

1. 研究開始当初の背景

(1) 局所的な指数定理とは、対応する熱方程式の各 p 次形式の基本解の核関数の trace の交代和の各点での値を、その多様体の幾何学的量で表示することである。得られたものを多様体全体で積分することにより、指数定理が得られる。その例としては、ガウス-ボンネ-チャーンの定理やリーマン-ロッホの定理を挙げることが出来る。熱方程式の基本解の核関数の trace は、時間変数 t に関して特異性を持っているのであるから、局所的な指数定理はその交代和をとることによって、多様体の各点で特異性が消失することを意味している。これらの証明は、 t を助変数として持つ擬微分作用素として基本解を構成することにより、研究代表者によって与えられている。その際には通常の表象の重みではなく、新たな重みを作用素の表象に導入することによって、擬微分作用素の calculus を実行することが重要なキーポイントである。その手法は境界のある場合も含む局所的ガウス-ボンネ-チャーンの定理、ケーラー多様体での局所的リーマン-ロッホの定理、および非ケーラー多様体で局所的リーマン-ロッホの定理が成り立つ複素多様体の特徴付けへと発展してきた。

(2) 2007 年に開催された第 6 回 ISAAC Congress の特別講演の一つは J.Sjostrand によるフォッカー・プランク方程式のスペクトルについてであった。B.Helffer and F.Nier も、定常問題の空間変数のノルムが無限大となる所での挙動を考察しているが、本来は F.Heraru and F.Nier に見られるような時間変数を加えた熱伝導方程式について、時間が無限大での定常状態への漸近挙動を求

める事が問題となる。彼らは位置を表わす変数と速度を表わす変数を個別に考えて、作用素に値を取る作用素のレゾルベントを考察することにより結果を得ている。

(3) 丁度 2 次で特性面の上で退化している放物型方程式に関しては、研究代表者によってその初期値問題の基本解を擬微分作用素として構成でき、基本解の主要部が主表象と副主表象を使って正確な形で表示されることが示されていた。

2. 研究の目的

(1) 上記の(1)を一般の Dirac Operator に対する局所指数と多様体の curvature およびベクトル束の Chern 類との関係に拡張しその関係を明らかにする。さらに境界がある場合に、局所的な指数の解析的手法による証明における問題点を明確にする。

(2) フォッカー・プランク方程式は、位置を表わす変数と速度を表わす変数を両方の変数を同時に考察すると、これは退化した放物型方程式と見なす事ができる。けれども、その主要部は丁度 2 次で特異面で退化していないので、慎重な解析が要求される。擬微分作用素によるフォッカー・プランク方程式の解の主要部による近似定理の確立を目指し、さらにそれより基本解の漸近挙動を導く。定常作用素のレゾルベントからのアプローチによる研究はあるが、熱方程式そのものとしての取り扱いは殆どないので、成功すれば、非常に明確で、幅広い結果が出ると予想される。

(3) Lie 群の作用から自然に導かれる退化した熱方程式に対して、基本解の構成を試みる。その正確な表示からスペクトラルゼータ函数の特異点の情報を得る。

3. 研究の方法

(1), (2), (3) 全てについて熱伝導方程式の基本解を、主として擬微分作用素の手法で構成する。その際に、解析する対象に応じて、主要部分を変化させて基本解を求める。

(1) 背景(1)で述べた方法を一般化した Dirac 作用素にまで拡張することができると、今まで考察されている指数定理の局所版に全て適用できることが証明でき、全ての場合に統一的な言葉で解析的な証明を与えることになる。

(2) 上記 B.Helffer and F.Nier において除外しているポテンシャルを持つフォッカー・プランク方程式の基本解の正確な形を求め、さらに固有関数展開を求める。

(3) ベキ零リー群上の退化した熱方程式に対する基本解の構成とその応用として固有値の漸近分布などを得ることを目指す。さらに、より一般の多様体上での退化した熱方程式についての同様の考察をする。これについてはゲッチンゲンの W.Bauer 氏および東京理科大学の古谷教授との共同研究をする。2010年と2011年の9月にゲッチンゲンで3名で共同研究を行う。

4. 研究成果

(1) 一般の Dirac Operator の局所指数定

理と多様体の curvature およびベクトル束の Chern 類との関係を明らかにした。即ち一般の Dirac Operator の局所的な指数が擬微分作用素の表象計算によって、curvature およびベクトル束の Chern 類で記述できる解析的な証明を与えた。この成果を2009年7月にロンドンで開催された国際研究集会 ISAAC と同年12月に台湾で開催された国際研究集会等に参加して、発表した。この成果は論文としてに掲載された。

(2) フォッカー・プランク方程式の特別な場合について、基本解の正確な記述を得、その結果を応用して固有関数展開を導くことに成功した。この研究は申請者単独で行ったものであり、2011年にその成果はいくつかの国際研究集会等で発表した。この研究はより一般のフォッカー・プランク作用素に対する研究の手始めである。

(3) 多様体上の退化した熱方程式に対する基本解の構成とその応用に関しては、東京理科大学の古谷賢朗氏とゲッチンゲン大学の Bauer 氏との共同研究を現在も進めている。ある種の Nilmanifold 上の退化した熱方程式に対する基本解に関しては、その漸近展開の主要項のみが現れることを証明し、それと関係してスペクトラルゼータ函数がただ一つの特異点を持つことおよびその留数の値も求めることができた。この成果は、国際研究集会で発表するとともに、論文として発表した。さらに、球面 S^n の上で自然に定義される退化した楕円型作用素の特徴付けを行った。その結果、このようなものは $n=3, 7, 15$ に限ることを示した。これは新しい結果であり、考察されるべき作用素の範囲を明確にするものである。これらの作用素の

固有関数についての考察も合わせて行った。これらは、共同研究者が2011年9月にゲッチンゲンで最終の研究打ち合わせをして得られたものであり、成果は共著の論文として作成し、投稿している。

(4) さらに、2010年に研究代表者と海外の研究者達合計4名で、熱方程式の様々なモデルの方程式の基本解の構成に関しての種々の方法について著した本を出版した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 3件)

W.Bauer-K.Furutani-C.Iwasaki, Spectral zeta function of the sub-Laplacian on two step nilmanifolds, J. Math. Pures Appl. Vol.97(2012), 査読有,242-261.

DOI:10.1016/j.matpur.2011.06.003

C.Iwasaki, Calculus of Pseudo-Differential Operators and a Local Index of Dirac Operators, Analysis, Applications and Computations, Operator Theory: Advances and Applications, Vol.213(2011), 査読有,123-136.

W.Bauer-K.Furutani-C.Iwasaki, Spectral analysis and geometry of a sub-Laplacian and related Grushin type operators, Advances and Applications, Vol. 211(2011), 査読有, 183-187.

[学会発表](計 12件)

岩崎千里, A representation of the

fundamental solution and eigenfunction expansion to the Fokker-Planck operator, Workshop Geometric and Singular Analysis, 2012年3月16日,ポツダム(ドイツ)

岩崎千里, Symbols of the fundamental solution and spectral zeta function of Nilmanifolds, 偏微分方程式姫路研究集会, 2012年2月24日,姫路(兵庫県)

岩崎千里, Spectral zeta function of the sub-Laplacian on nilmanifolds, 2011 NCTS Taiwan-Japan Joint Workshop on PDEs and Geometric Analysis, 2011年12月21日,新竹(台湾)

岩崎千里, A representation of the fundamental solution to the Fokker-Planck operator, Fu-Jen Form on Analysis, 2011年12月16日,台北(台湾)

岩崎千里, Construction of the fundamental solutions and spectral functions of nilmanifolds, 26th Matsuyama Camp: Recent Development on Partial Differential Equations, 2011年1月9日,京都市(京都府)

岩崎千里, 退化した放物型方程式に対する基本解の表象による表現とその応用、関数解析・実関数論合同シンポジウム, 2010年8月3日,野田市(千葉県)

岩崎千里, A representation of the fundamental solution to some heat equation and its applications, Workshop on Fourier Analysis and Partial Differential Equations, 2010年6月16日,ゲッチンゲン(ドイツ)

岩崎千里, A representation of the fundamental solution to some heat equation and its applications, Fu-Jen Forum on Analysis, 2009年12月24日,台北(台湾)

岩崎千里, Symbolic calculus of pseudo-differential operators and a local index, Abstract Harmonic Analysis 2009, 2009年12月22日, 高雄(台湾)

岩崎千里, Symbolic calculus of pseudo-differential operators and a local index for Dirac operators, Taiwan-Norway Joint Workshop on Geometric Analysis and Mathematical Physics, 2009年12月15日, 新竹(台湾)

岩崎千里, Construction of the fundamental solution and a local index, Harmonic Analysis and related Topics, 2009年10月6日, 野田市(千葉県)

岩崎千里, Calculus of pseudo-differential operators and a local index of Dirac Operators, ISAAC Congress, 2009年7月16日, ロンドン(イギリス)

[図書](計 1件)

O.Calin-D.C.Chang-K.Furutani-C.Iwasaki, Birkhauser, Heat Kernels for Elliptic and Sub-elliptic Operators, 2010, 361-416

6. 研究組織

(1) 研究代表者

岩崎 千里 (IWASAKI CHISATO)

兵庫県立大学・大学院物質理学研究科・教授

研究者番号 : 30028261

(2) 研究分担者

()

研究者番号 :

(3) 連携研究者

()

研究者番号 :