

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年 5月25日現在

機関番号：34315

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2009～2011

課題番号：21540195

研究課題名（和文）シュレディンガー方程式の準古典解析

研究課題名（英文）Semi-classical Analysis for Schrödinger Equations

研究代表者

藤家 雪朗（FUJIE SETSURO）

立命館大学・理工学部・教授

研究者番号：00238536

研究成果の概要（和文）：シュレディンガー方程式の散乱問題を考える。対応する古典力学が捕捉された軌道を持つとき、そのエネルギーの近くにレゾナンスと呼ばれるレゾルベントの極が現われる。特にエネルギーがポテンシャルの（1）極小値、（2）極大値、さらには（3）連立の場合の二つのポテンシャルの鍾状交差する値の近くであるときのレゾナンスの準古典分布などについて成果を上げた。

研究成果の概要（英文）：We consider the scattering problem for Schrödinger equations. If the corresponding classical dynamics has trapped trajectories at an energy, some complex poles of the resolvent, called resonances, appear near this energy. We have succeeded in clarifying the semiclassical distribution etc. of resonances near the potential (1) minimum, (2) maximum and (3) the conical intersection in the case of a system.

交付決定額

（金額単位：円）

| | 直接経費 | 間接経費 | 合計 |
|--------|-----------|-----------|-----------|
| 2009年度 | 1,300,000 | 390,000 | 1,690,000 |
| 2010年度 | 1,100,000 | 330,000 | 1,430,000 |
| 2011年度 | 1,000,000 | 300,000 | 1,300,000 |
| 年度 | | | |
| 年度 | | | |
| 総計 | 3,400,000 | 1,020,000 | 4,420,000 |

研究分野：数学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：準古典解析、シュレディンガー方程式

1. 研究開始当初の背景

上記研究成果の概要の述べた3つの研究内容のそれぞれについて述べる。

（1）「島の中の井戸型」と呼ばれる、レゾナンスを生成する典型的なポテンシャルの極小値の近くのレゾナンスの虚部は、準古典パラメータに関して指数的に小さく、指数のオーダーは「井戸」から「海」へのアグモン距離によって与えられることが、ポテンシャルが解析的な場合には既に知られていた。ポ

テンシャルの解析性は、しかし、物理学的には必ずしも必要ではないと感じ、滑らかであるという仮定の下で同じ結果が得られるかどうかに興味があった。

（2）レゾナンスの準古典分布は、対応する古典力学の捕捉された軌道の幾何学的性質との関係においてよく知られた興味深い問題である。特に捕捉された軌道がホモクリニックである場合にレゾナンスがどのような分布をするかという問題は、この分野におい

て広く注目を集めている。一次元の場合については、T.Ramond との共同研究によって解決しているのが、多次元の場合が問題であった。この問題を解く重要なステップとして、双曲型不動点を超えて超局所解を接続する問題を、J.F.Bony, T.Ramond, M.Zerzeri とともに解決したのが2007年のことである。この結果の副産物として、まずは（ホモクリニックではなく）双曲型不動点が生成するレゾナンスに関わる様々な物理量を計算してみようと思ったのが、背景である。

(3) 2元連立のシュレディンガー作用素を考える。ポテンシャルは 2×2 行列値関数である。この行列の各成分は解析的であるが、二つの固有値が錘状交差するような最も典型的な2次元のポテンシャルが知られていた。このシュレディンガー作用素のレゾナンスについては、量子化学の分野でも強い興味を持たれており、数値実験などによる結果はあるものの、数学的に厳密な解析はこれまで全くなかった。

2. 研究の目的

(1) ポテンシャルが滑らかであって解析的でない場合も、「島の中の井戸型」ポテンシャルが生成するレゾナンスの虚部が解析的な場合と同様の漸近展開を持つことを証明することが目的であった。

(2) 多次元の場合に、ポテンシャルの非退化な最大値が生成するレゾナンス（存在と分布は少なくともポテンシャルが解析的な場合は既知であった）について、まず射影作用素の漸近展開を計算すること、さらにその応用として、散乱振幅の留数を計算すること、およびシュレディンガー時間発展作用素のレゾナンスを用いて表現することを目的とした。

(3) 上記の具体的な2次元の例に対し、レゾナンスの量子化条件を求めて、その準古典分布を明らかにするのが目的である。そのための道具として、2元1階の連立方程式に対する完全WKB解析の理論、特にその確定特異点の近くでの漸近解の構成の方法を研究するのが本質的な仕事であった。

3. 研究の方法

(1) ポテンシャルの解析性が問題となるのは、漸近解を古典禁止領域から古典許容領域に接続する時である。漸近解をエアリ型積分で表現した時、相関数の臨界点が古典許容領域では複素数になるからである。我々は概解析拡張を用いることによって、滑らかな関数を複素平面にまで拡張した。その代り、準古典パラメータに依存して実軸に近い領域で、

精密な解析が必要であった。

(2) 双曲型不動点の周りには、incoming な安定多様体と outgoing な安定多様体が定義される。incoming な安定多様体の上で定義された超局所漸近解が与えられた時、outgoing な安定多様体上での超局所漸近解を計算する公式を J.F.Bony, T.Ramond, M.Zerzeri との共同研究で得ている。これを本質的に用いることにより、ポテンシャルの非退化最大値の近くのレゾナンスへの射影作用素が計算できる。散乱振幅の留数の計算、シュレディンガー時間発展作用素のレゾナンスを用いた表現は、この射影作用素の結果の応用である。

(3) 扱う作用素の特殊性を利用し、フーリエ変換を用いて一階の作用素に変換し、さらにフーリエ級数展開を用いて一次元の問題に帰着させる。その後は、確定特異点の近くで前述の2元1階の連立方程式に対する完全WKB解析の理論を構築、応用し、またポテンシャルの交差点では、超局所的に方程式をある標準形に変換する手法を用いる。

4. 研究成果

(1) 解析性を待たない、滑らかな「島の中の井戸型」ポテンシャルが生成するレゾナンスの虚部の漸近展開に関して、解析的な場合と同じ結果を得た。すなわち、レゾナンスの虚部は準古典パラメータに関して指数的に小さな因子をもつ漸近展開を持ち、その指数のオーダーは「井戸」から「海」へのアグモン距離によって与えられる。この結果は、トンネル効果を扱う問題において従来常に仮定されてきた解析性の仮定は、技術的な仮定にすぎないことを示唆している。

(2) 多次元の場合に、レゾナンスへの射影作用素、散乱振幅の留数を求め、時間発展作用素のレゾナンスによる表現を与えた。レゾナンスの分布については既に先行結果があったが、この研究で得られた結果は、その副産物として得られるものではなく、それより遙かに豊かな情報を与えている。

(3) 量子化条件を求め、それによってレゾナンスの準古典分布を明らかにすることに成功した。一つの例についての結果であるが、まったく新しいタイプの分布であって、この分野の研究におけるモデルとなることが期待される。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 9 件)

- ① 著書名 : J.-F. Bony, S. Fujiié, T. Ramond, M. Zerzeri,
論文標題 : Spectral projection, residue of the scattering amplitude and Schrödinger group expansion for barrier-top resonances,
雑誌名 : Ann. Inst. Fourier, Grenoble,
査読 : 有、巻 : 61-4,
発行年 : 2011, ページ : 1351-1406
- ② 著書名 : S. Fujiié, A. Lahmar-Benbernou, A. Martinez,
論文標題 : Width of shape resonances for non globally analytic potentials,
雑誌名 : J. Math. Soc. Japan,
査読 : 有、巻 : 63,
発行年 : 2011, ページ : 1-78
- ③ 著書名 : C. Iwasaki,
論文標題 : Calculus of pseudo-differential operators and a local index of Dirac operators.,
雑誌名 : Oper. Theory Adv. Appl.,
査読 : 有、巻 : 213,
発行年 : 2011, ページ : 123-136
- ④ 著書名 : W. Bauer, K. Furutani, C. Iwasaki,
論文標題 : Spectral analysis and geometry of sub-Laplacian and related Grushin-type operators,
雑誌名 : Oper. Theory Adv. Appl.,
査読 : 有、巻 : 211,
発行年 : 2011, ページ : 183-290
- ⑤ 著書名 : A. Balinsky, W. D. Evans, T. Umeda,
論文標題 : The Dirac-Hardy and Dirac-Sobolev inequalities in L^1 ,
雑誌名 : Publ. Res. Inst. Math. Sci.

査読 : 有、巻 : 47-3,

発行年 : 2011, ページ : 791-801

- ⑥ 著書名 : Y. Saito, T. Umeda,
論文標題 : Eigenfunctions at the threshold energies of magnetic Dirac operators,
雑誌名 : Rev. Math. Phys.,
査読 : 有、巻 : 23-2,
発行年 : 2011, ページ : 155-178
- ⑦ 著書名 : T. Watanabe,
論文標題 : A singular Cauchy problem For the Euler-Poisson-Darboux equation,
雑誌名 : J. Math. Pures. Appl.,
査読 : 有、巻 : 93 (9),
発行年 : 2010, ページ : 223-239
- ⑧ 著書名 : C. Iwasaki,
論文標題 : Construction of the fundamental solution and curvature of manifolds with boundary,
雑誌名 : Oper. Theory Adv. Appl.,
査読 : 有、巻 : 189,
発行年 : 2009, ページ : 43-65
- ⑨ 著書名 : S. Fujiié, C. Lasser, L. Nédélec,
論文標題 : Semiclassical resonances for a two-level Schrödinger operator with a conical intersection,
雑誌名 : Asymptotic Analysis,
査読 : 有、巻 : 65 1-2,
発行年 : 2009, ページ : 17-58

[学会発表] (計 6 件)

- ① 藤家雪朗 : スペクトル・散乱理論とその周辺 "Resonances created by homoclinic orbits associated with an isotropic equilibrium" 平成 23 年 1 月 15 日 京都大学理学部(京都府)
- ② 藤家雪朗 : 仙台シンポジウム "Semiclassical resonances created by homoclinic orbits" 平成 23 年 8 月 25 日 東北大学情報理学研究科(宮城県)

- ③ 藤家雪朗 : Scattering Theory - An International Workshop in Tokyo
“Semi-classical width of resonances created by homoclinic orbits” 平成23年6月22日 東京大学数理科学研究科 (東京都)
- ④ 藤家雪朗 : Journees Mathematiques de Kairouan - E.D.P. et Applications
“ Width of semiclassical resonances associated with homoclinic orbits’ ”
平成22年11月6日 Universite de Kairouen(チュニジア)
- ⑤ 藤家雪朗 : The 8th Workshop on Linear and Nonlinear waves
“ Resonance free domain for homoclinic trajectories’ ” 平成22年9月10日 大阪大学理学部(大阪府)
- ⑥ 藤家雪朗 : Recent Developments in Resurgence Theory and Related Topics
“ Semiclassical resonances created by homoclinic orbits’ ” 平成22年6月29日 関西セミナーハウス(京都府)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

藤家 雪朗 (FUJIIIE SETSURO)
立命館大学・理工学部・教授
研究者番号 : 00238536

(3) 連携研究者

保城 寿彦 (HOSHIRO TOSHIHIKO)
兵庫県立大学・大学院物質理学研究科・教授
研究者番号 : 40211544

榎田 登美男 (UMEDA TOMIO)
兵庫県立大学・大学院物質理学研究科・教授
研究者番号 : 20160319

岩崎 千里 (IWASAKI CHISATO)
兵庫県立大学・大学院物質理学研究科・教授
研究者番号 : 30028261

土居 伸一 (DOI SHINICHI)
大阪大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号 : 00243006

渡部 拓也 (WATANABE TAKUYA)
立命館大学・理工学部・助教
研究者番号 : 80458009