

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 24年 5月15日 現在

機関番号：32613

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2009～2011

課題番号：21540196

研究課題名（和文）経路積分－時間分割近似法による経路空間上の解析として

研究課題名（英文）Path integrals as analysis on path space by time slicing approximation

研究代表者

熊ノ郷 直人（KUMANOGO NAOTO）

工学院大学・基礎・教養教育部門・教授

研究者番号：40296778

研究成果の概要（和文）：区分的定数経路による時間分割近似法を用いて、相空間 Feynman 経路積分が数学的に厳密な意味を持つ2つの一般的な汎関数のクラスを与えた。各々のクラスは和、積、平行移動、線形変換、汎関数微分に関して閉じている。さらに、使用する際に注意が必要であるが、その相空間経路積分において、積分や極限との順序交換、平行移動や直交変換における自然な性質、汎関数に関する部分積分、Hamilton 型の準古典近似を証明した。

研究成果の概要（英文）： Using the time slicing approximation via piecewise constant paths, we gave two general classes of functionals for which the phase space Feynman path integrals have a mathematically rigorous meaning. Each class is closed under addition, multiplication, translation, linear transformation and functional differentiation. Furthermore, though we need to pay attention for use, we proved the interchange of the order with some integrals and some limits, natural properties under translation and orthogonal transformation, the integration by parts with respect to functional differentiation, and the semiclassical approximation of Hamiltonian type in the phase space path integrals.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	1,300,000	390,000	1,690,000
2010年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2011年度	1,100,000	330,000	1,430,000
年度			
年度			
総計	3,500,000	1,050,000	4,550,000

研究分野：基礎解析学、偏微分方程式

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：経路積分、関数方程式、関数解析学、数理物理、振動積分、擬微分作用素、準古典近似、確率解析

1. 研究開始当初の背景

1948年、R. P. Feynman は Schrödinger 方程式の基本解の積分核を経路積分の形で表現した。Feynman は経路積分をすべての経路に

関する新しい和であると主張し、有限次元積分の極限として説明した。この方法は現在、時間分割近似法と呼ばれている。さらに Feynman は一般的な汎関数を振幅とする経路

積分を考え、経路積分と汎関数微分からなる経路空間上の新しい解析学を提案し、Hamilton 形式による量子力学に Lagrange 形式による量子力学という新しい視点を与えた。また一方で Feynman は Hamilton 型の経路積分も提案した。しかし、1960 年、R. H. Cameron は経路積分の測度が数学的には存在しないことを証明した。また、Hamilton 型の経路積分は、物理的にも不確定性原理があり、位置と運動量の経路という定義そのものに曖昧さがあり、可能となる演算も曖昧である。

2. 研究の目的

本研究課題においては、区分的定数経路を用いて、Hamilton 型経路積分が存在する一般的な汎関数のクラスを数学的に定義し、Hamilton 型経路積分で可能となる演算を数学的に明確化する。区分的定数経路は近似として荒いが単純であるため、不確定性原理に関わらないように基本的な汎関数の一部を排除すれば、和、積、経路の平行移動や線形変換、汎関数微分など多くの演算に関して閉じたクラスを定義することが可能であろう。さらに、その Hamilton 型経路積分において、積分や 極限との順序交換定理、経路の平行移動や直交変換に関する性質、汎関数微分に関する部分積分、準古典近似など可能となる演算とその条件を数学的に明確化する。

3. 研究の方法

まず、区分的定数経路による Hamilton 型経路積分の時間分割近似法の多重振動積分を直接扱う方法を開発し、時間分割近似法が広義一様収束する汎関数の条件を求めた。

次に、時間分割近似法が広義一様収束する汎関数の条件を、和、積、経路の平行移動や線形変換、汎関数微分などに関して閉じるといった数学的演算の観点から 2 つに分けて書

き直し、一般的な汎関数の 2 つのクラスを構成した。

さらに、その Hamilton 型経路積分において、積分や極限との順序交換定理、摂動展開、Hamilton 型の準古典近似、経路の平行移動や直交変換における自然な性質、汎関数微分に関する部分積分などのうち、証明できる演算を証明し、可能となる演算を数学的に明確化した。

4. 研究成果

(1) 区分的定数経路による時間分割近似法を用いて、一般的な汎関数を振幅とする相空間 (Hamilton 型) 経路積分が存在する一般的な汎関数の 2 つのクラスを与えた。厳密に言えば、各々のクラスに属する汎関数を振幅とする相空間経路積分の区分的定数経路による時間分割近似法が、位置経路の終点と運動量経路の始点に関して広義一様収束する。この 2 つの汎関数のクラスは、不確定原理に関わらないように基本的な汎関数の一部を排除しているため、和、積、経路の平行移動や線形変換、汎関数微分といった演算に関して閉じている。このため、相空間経路積分可能な多くの汎関数を創ることができる。さらに応用として、不確定性原理を避けるため使用する際には注意が必要であるが、この相空間経路積分において、時間に関する積分や極限との順序交換定理、経路の平行移動や直交変換に関する自然な性質、汎関数微分に関する部分積分、Hamilton 型の準古典近似が成立することを示した。この結果は論文②として発表した。

(2) (前回から継続してきた研究として) 熱方程式に対して時間分割近似法を用いて、なめらかな汎関数微分をもつ経路積分が存在する一般的な汎関数のクラスを与えた。厳

密に言えば、ガウス過程に対応する経路積分の時間分割近似法が、経路の始点と終点に関して広義一様収束する一般的な汎関数のクラスを与えた。このクラスは、基本的な汎関数を含み、和、積、経路の平行移動や線形変換、経路に関する汎関数微分といった演算に関して閉じている。このため、経路積分可能な多くの汎関数を創ることができる。さらに応用として、そのガウス過程に対応する経路積分において、Riemann 積分や極限との順序交換定理、微分積分学の基本定理、経路の平行移動や直交変換に関する自然な性質、汎関数微分による部分積分や Taylor 展開を証明した。この結果は論文④として、ようやく発表できた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計6件)

①熊ノ郷直人、経路積分－時間分割近似法による経路空間上の解析として、数理解析研究所講究録、サイエンス社、査読無、No. 586、2012、pp. 28-34

②Naoto Kumano-go、Phase space Feynman path integrals with smooth functional derivatives by time slicing approximation、Bulletin des Sciences Mathématiques、査読有、Vol. 135、No. 8、2011、pp. 936-987、<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0007449711000972>

③熊ノ郷直人、ガウス過程に対する経路積分－時間分割近似法による経路空間上の解析として－、数理解析研究所講究録、査読無、1723 巻、2011、pp. 55-78

④Naoto Kumano-go、Path integrals for Gaussian processes as analysis on path space by time slicing approximation、Integration Mathematical Theory and Applications、査読有、Vol. 1、No. 3、2010、pp. 253-278、

https://www.novapublishers.com/catalog/product_info.php?products_id=20199

⑤Naoto Kumano-go、Daisuke Fujiwara、Smooth functional derivatives in Feynman path integrals by time slicing approximation、More Progresses in Analysis: Proceedings of the 5th International ISAAC Congress、World Scientific Pub Co Inc、査読無、2009、pp. 429-438

⑥Naoto Kumano-go、Daisuke Fujiwara、Smooth functional derivatives in Feynman path integrals by time slicing approximation、数理解析研究所講究録、査読無、1648 巻、2009、pp. 32-52、

<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/1648-03.pdf>

[学会発表] (計16件)

①Naoto Kumano-go、Phase space Feynman path integrals with smooth functional derivatives by time slicing approximation、The workshop “Geometric and Singular Analysis”、2012年3月16日、The University of Potsdam、Germany

②熊ノ郷直人、Phase space Feynman path integrals as analysis on path space、研究集会「超局所解析とその展望」、2012年3月8日、日本大学

③ Naoto Kumano-go、Phase space Feynman path integrals with smooth functional derivatives by time slicing approximation, The workshop “Recent Developments in Stochastic Analysis”、2012年1月31日、EPFL, Switzerland

④ 熊ノ郷直人、区分的陪特性経路による相空間経路積分—計算例を中心に、研究集会「確率解析とその周辺」、2011年11月13日、佐賀大学

⑤ 熊ノ郷直人、区分的陪特性経路による相空間の経路積分—計算例を中心に—、数理科学セミナー、2011年9月25日、松本市浅間温泉みやま荘

⑥ Naoto Kumano-go、Phase space Feynman path integrals by time slicing approximation, RIMS共同研究「Introductory Workshop on Feynman Path Integral and Microlocal Analysis」、2011年6月23, 24日 (2回講演)、京都大学数理解析研究所

⑦ Naoto Kumano-go、Path integrals for Gaussian processes as analysis on path space by time slicing approximation、Global COE International Mini-Workshop “Microlocal analysis and partial differential equations”、2010年11月20日、東京大学

⑧ 熊ノ郷直人、Path integrals for Gaussian processes as analysis on path space by time slicing approximation、研究集会「確率解析とその周辺」、2010年11月12日、岡山大学

⑨ Naoto Kumano-go、Path integrals for Gaussian processes as analysis on path space by time slicing approximation, The 10th International Conference “Path integrals 2010”、2010年7月13日、The Howard University, USA

⑩ 熊ノ郷直人、ガウス過程に対する経路積分—時間分割近似法による経路空間上の解析として、RIMS共同研究「経路積分と超局所解析の入門」、2010年5月26日、京都大学数理解析研究所

⑪ Naoto Kumano-go、Phase space Feynman path integrals via piecewise bicharacteristic paths and their semiclassical approximations、The workshop “Operator on singular spaces”、2010年3月10日、The University of Potsdam, Germany

⑫ Naoto Kumano-go、Phase space Feynman path integrals via piecewise bicharacteristic paths and their semiclassical approximations, The meeting “Feynman Path Integrals and Their Applications”、2010年1月18日、Swansea University, UK

⑬ 熊ノ郷直人、Feynman 経路積分—時間分割近似法による経路空間上の解析として、ENCOUNTER with MATHEMATICS、2010年1月9日、中央大学

⑭ Naoto Kumano-go、Phase space Feynman path integrals and their semi-classical approximations、RIMS Conference

“Microlocal Analysis and Related Topics”、2009年10月21日、関西学院大学
大阪梅田キャンパス

⑮ Naoto Kumano-go、Feynman integrals、Homi Bhabha Birth Centenary Symposium on Hyperbolic Partial Differential Equations and Related Topics、2009年7月20～23日
(4回講演)、TIFR-CAM、India

⑯ Naoto Kumano-go、Phase space Feynman path integrals via piecewise bicharacteristic paths and their semiclassical approximations、NIMS hot topics workshop on Infinite Dimensional Analysis and Related Topics、2009年6月24日、Hannam University、Korea

[図書] (計1件)

①編集：熊ノ郷直人、山崎晋、岡田靖則、
数理解析研究所講究録 1723 「経路積分と超
局所解析の入門」、京都大学数理解析研究所、
2011年1月

6. 研究組織

(1) 研究代表者

熊ノ郷 直人 (KUMANOGO NAOTO)
工学院大学・基礎・教養教育部門・教授
研究者番号：40296778

(2) 研究分担者

()

研究者番号：

(3) 連携研究者

()

研究者番号：