

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 24 年 4 月 19 日現在

機関番号：24402

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2009 ～ 2011

課題番号：21540197

研究課題名（和文）退化放物型ケーラー・シーゲル系の解の漸近挙動と界面曲線に関する研究

研究課題名（英文） On asymptotic behavior and interface curve of solution for Keller-Segel system of degenerate type

研究代表者

杉山 由恵 (SUGIYAMA YOSHIE)

大阪市立大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：60308210

研究成果の概要（和文）：

測度値解: 半線形 Keller-Segel 系の古典解において局所解の範囲に留まっている存在定理を測度値関数にまで解の概念を拡張することにより、爆発解をも含むうる時間大域的存在定理を確立した。

解の漸近挙動: 時間無限大における解の漸近挙動について考察し、解の漸近形は方程式系のもつ非自明な定常解であることを証明した。

一般次元における弱解の一意性: 準線形退化型 (KS) を考察し、弱解が一意的である関数空間を確立した。

準線形特異型 (KS) の有限伝播性: 準線形特異型 $0 < m < 1$ の場合に、小さい初期データに対して、時間大域的な弱解の存在が示し、非線形現象特有の性質である解の消滅現象を証明した。

研究成果の概要（英文）：

Measure valued solution: The time global solution has been constructed for Keller-Segel system of semi-linear type by expanding the functional space to the measure valued solution.

Asymptotics: We have proved that the solution of Keller-Segel system behaves like a stationary solution asymptotically as time tends to infinity.

Uniqueness:

We have established the functional space which the weak solution becomes unique.

Finite speed propagation:

The existence of solution and the extinction phenomena has been proved for Keller-Segel system of singular type.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2009 年度	1,500,000	450,000	1,950,000
2010 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2011 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総計	3,500,000	1,050,000	4,550,000

研究分野：偏微分方程式論

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：退化型, Keller-Segel 系, 爆発解, 測度値解

1. 研究開始当初の背景

KS system 単細胞生物の密度の時間発展を追跡する数理生物モデルとして 70 年代に提唱された反応拡散型方程式系である。半線形型については、解の時間大域的な存在や有限時刻における爆発が知られており、流体力学におけるナビエ・ストークス方程式と同様に、今日数理生物学における確固たるモデルであると目されている。半線形型、退化準線形放物型である KS system は、空間次元と初期データとの微妙なバランスのもとに、時間大域解と爆発解の存在が顕著に現れる非線形方程式のモデルとして 1980 年代から活発に議論されてきている。国内においては、永井敏隆、鈴木貴、仙葉隆の 3 氏を中心に毎年京大数理解析研究所の研究集会「変分問題とその周辺」の主要な研究テーマとして取り上げられている。KS system の研究は、我が国が世界をリードする立場にあり、豪州、アジア、米国、欧州の各地で毎年多くの日本人研究者が参加・講演を行っている。

2. 研究の目的

本研究では数理生物学のモデルである非線形偏微分方程式を研究対象とする。具体的には線形熱方程式や多孔質媒質 (Porous Medium) 方程式を第 1 次近似としてとらえ、その高次近似をも考慮にいたした Keller-Segel system を主要な研究対象とし、小さい初期条件に対して、時間大域解の存在、一意性、安定性、といった“適切性”を研究する。また、大きい初期条件に対しては、解の有限時間爆発現象や漸近挙動を関数解析的・接合漸近展開の両手法により明らかにする。更に解のクラスを測度値解まで広げることで、大きい初期値を持つ場合にも“適切性”を論じ、Keller-Segel system の解の構造に関して、初期値の大きさに依存しない統一理論を構築することが本研究の目的である。

3. 研究の方法

科研費採択期間中、申請課題の趣旨にそった研究を Max Plank Institute の Luckhaus 氏、Bonn 大学の J. J. L. Velazquez 氏、Cambridge 大学の A. J. Carrillo 氏らの Keller-Segel 系の研究において、国際的に極めて著名な研究者らとの共同研究を活発に行い下記(項目 5)のような研究成果を挙げた。こうした国際的な研究交流により重要な研究成果を挙げるには、通常渡航費の工面が課題となる。平成 21 年度～平成 23 年度においては、科研費を活用することで国際的な研究を遂行することが可能となった。

4. 研究成果

測度値解：半線形 Keller-Segel 系の爆発解の構造を解析した。より詳しくは、一般には古典解において局所解の範囲に留まっている存在定理を測度値関数にまで解の概念を拡張することにより、爆発解をも含む時間大域的な存在定理を確立した。更に、異なる二つの近似の方法によって、非一意なる極限方程式の存在を証明した。我々の得た測度値解は、爆発点において、その特異部分が delta measure の有限和で記述される。

解の漸近挙動：劣臨界指数においては、任意の初期データに対して時間大域的な弱解の存在が示されている。我々は時間無限大における解の漸近挙動について考察し、解の漸近形は方程式系のもつ非自明な定常解であることを証明した。(Carrillo-杉山-矢作 [2011].) より詳細には、(KS) に付随する変分構造に焦点を当てることにより、時間大域解の漸近形を決定した。

一般次元における弱解の一意性：

我々は準線形退化型 (KS) を考察し、弱解が一意的である関数空間を確立した。(杉山 [2010], 杉山-矢作 [2010].) 即ち、空間 N 次元において、弱解が一意的であるための十分条件である関数空間を得た。

準線形特異型 (KS) の有限伝播性：

我々は準線形特異型 $0 < m < 1$ の場合に、小さい初期データに対して、時間大域的な弱解の存在を示し、非線形現象特有の性質である解の消滅現象を証明した。更に、大きい初期データに対しては、 $q = 2$ の場合に、有限時間爆発解が存在することを検証した。(杉山-矢作 [2011].)

意義と重要性：

我々の結果は、複素関数論における真性特異点のまわりの有理型関数の挙動を予見させ、Keller-Segel 系においては、解を測度値関数にまで拡張することにより、無限個の解の存在を示唆するものである。今後の展開により放物型方程式系の解の解析に新たな知見を与えるものと期待される。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 19 件)

- ① S. Luckhaus, Y. Sugiyama and J. J. L. Velazquez, Measure valued solutions of the 2D Keller-Segel system, to appear in Archive for Rational Mechanics and Analysis. (査読有)
- ② Y. Sugiyama, Finite speed of propagation in 1-D degenerate Keller-Segel system, to appear in Math. Nachr. (査読有)
- ③ H. Kozono, Y. Sugiyama and T. Wachi,

Uniqueness theorem of mild solutions to the Keller–Segel system in the scaling invariant space,
to appear in J. Differential Equations. (査読有)

④ Y. Sugiyama and Y. Yahagi, Extinction and asymptotic behavior of solutions for the Keller–Segel system of fast diffusion type, Adv. Math. Sci. Appl., **35**(2011), 209–219. (査読有)

⑤ Y. Sugiyama and Y. Yahagi, Extinction, decay and blow-up for Keller–Segel system of fast diffusion type, J. Differential Equations, **250** (2011), 3047–3087. (査読有)

⑥ Y. Sugiyama and J. J. L. Velazquez, Self-similar blow-up with a continuous range of values of the aggregated mass for a degenerate Keller–Segel system, Advances in Differential Equations, **16** (2011), 85–112. (査読有)

⑦ Y. Sugiyama and Y. Yahagi, Uniqueness and continuity of solution for the initial data in the scaling invariant class of degenerate Keller–Segel system, J. Evol. Equ., **11** (2010), 319–337. (査読有)

⑧ Y. Sugiyama, Uniqueness and regularity of weak solutions for the 1-D degenerate Keller–Segel systems, Nonlinear Analysis Series A: Theory, Methods & Applications, **73** (2010), 2230–2244. (査読有)

⑨ Y. Sugiyama, Aronson–Benilan type estimate and the optimal Holder continuity of weak solutions for the 1-D degenerate Keller–Segel systems, Revista Mathematica Iberoamericana, **26** (2010), 891–913. (査読有)

⑩ Y. Sugiyama, ε -regularity theorem and its application to the blow-up solutions of Keller–Segel systems in higher dimensions, J. Math. Anal. Appl., **364** (2010), 51–70. (査読有)

⑪ Y. Sugiyama, Asymptotic profile of blow-up solutions of Keller–Segel systems in super-critical cases, Differential Integral Equation, **23** (2010), 601–618. (査読有)

⑫ Y. Sugiyama, Blow-up criterion via scaling invariant quantities with effect on coefficient growth in Keller–Segel system, Differential Integral Equation, **23** (2010), 619–634. (査読有)

⑬ H. Kozono and Y. Sugiyama, and R. Takada, Non-existence of backward self-similar solutions of the Keller–Segel system in the scaling invariant class, J. Math. Anal. Appl., **365** (2010), 60–66. (査

読有)

⑭ H. Kozono and Y. Sugiyama, Strong solutions to the Keller–Segel system with the weak $L^{n/2}$ initial data and its application to the blow-up rate, Math. Nachr., **283** (2010), 732–751. (査読有)

⑮ 杉山由恵, 走化性方程式—非線形拡散と移流項の相互作用について, 日本応用数学会学会誌「応用数理」特集：移流項をもつ反応拡散系, 日本応用数学会, 2009. (査読有)

⑯ Y. Sugiyama, On ε -regularity theorem and asymptotic behaviors of solutions for Keller–Segel systems, SIAM J. Math. Anal., **41** (2009), 1664–1692. (査読有)

⑰ Y. Sugiyama, Partial regularity and its application to the blow-up asymptotics of parabolic systems modelling chemotaxis with porous medium diffusion, Adv. Study in Pure Math., **55** (2009), 137–160. (査読有)

⑱ Y. Sugiyama, Interfaces for 1-D degenerate Keller–Segel systems, J. Evol. Equ., **9** (2009), 123–142. (査読有)

⑲ H. Kozono and Y. Sugiyama, Global solution to the semi-linear Keller–Segel system of parabolic-parabolic type with small data in $L^r(\mathbb{R}^n)$, J. Differential Equations., **247** (2009), 1–32. (査読有)

[学会発表] (計 18 件)

① Asymptotic stability of stationary solutions to degenerate Keller–Segel systems, 「変分問題の展開—発展方程式論における変分的方法」, 京都大学数理解析研究所, 2011年6月6日.

② Measure valued solutions of the 2D Keller–Segel system, 「非線形の諸問題」, 山口大, 2010年9月17日.

③ Extinction and decay for Keller–Segel systems of fast diffusion type, 国際研究集会「Mathematical Analysis on the Navier–Stokes Equations and Related Topics, Past and Future」, 神戸大学, 2009年12月8日.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

杉山 由恵 (SUGIYAMA YOSHIE)

大阪市立大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：60308210

(2) 研究分担者

該当なし

(3) 連携研究者
該当なし