様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２６ 年　 ６ 月 ２６ 日現在

機関番号：３２６５２
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2009～2013
課題番号：２１５４０２００
研究課題名（和文）Ｄ加群のアルゴリズムとその応用

研究課題名（英文）Algorithms for D-modules and their applications

研究代表者
大阿久　俊則（OAKU, Toshinori）

東京女子大学・現代教養学部・教授

研究者番号：６０１５２０３９

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　2,500,000円、（間接経費）　750,000円

研究成果の概要（和文）：関数をそれが満たす微分方程式を通して研究することは解析学の主要な目的の１つである。そのためには、最初に与えられた関数の満たす微分方程式を求める必要がある。本研究では、微分方程式を代数的に捉えた概念であるD加群についての本研究代表者による一般的なアルゴリズムを具体的な種々の関数に適用し、多項式の対数が満たす微分方程式、多項式不等式で定義された領域上の積分が満たす微分方程式などを正確に計算するアルゴリズムを構成し、日本で開発された数式処理システムを用いて実現した。

研究成果の概要（英文）：It is a primary purpose of analysis to study a function by using the differential equations which it satisfies. Hence one must find, first of all, the differential equations which a given function satisfies. I applied general algorithms for D-modules (algebraic counterpart of differential equations), which I had introduced, to some specific functions and obtained algorithms for computing the differential equations for functions such as the logarithm of a polynomial and the integral over a domain defined by polynomial inequalities. I also implemented these algorithms by using a Japanese software system.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：代数解析　アルゴリズム　D加群　微分方程式　超関数

1. 研究開始当初の背景

線形（常または偏）微分方程式系を代数的に捉えた概念である D 加群理論は佐藤幹夫、柏原正樹らにより 1970 年前後に基礎が築かれた。しかし D 加群理論は高度に抽象的であり、そこで定義された種々の対象や不変量を具体的に計算する方法は特別な場合を除いて知られていなかった。そこで本研究代表者は 1995 年頃から D 加群についてのアルゴリズムの研究に着手し、アファイン空間上の（すなわち Weyl 代数上の）D 加群について、D 加群の最も基本的な不変量である特性多様体や、最も基本的な演算である制限と積分などの計算アルゴリズムを微分作用素環のグレブナー基底を用いて構成した。さらに多変数多項式に付随した b 関数（佐藤-Bernstein 多項式）や代数的局所コホモロジーの計算アルゴリズムも導いた。

一方、実際の応用上では、与えられた具体的な関数に対して、それが満たす微分方程式を決定し、さらにその積分が満たす微分方程式系を導くことが重要である。たとえば最近では統計学で現れる種々の確率分布をパラメータについての微分方程式を通して解析する研究が行われている。そのためには、まず種々の具体的な関数に対して、それが満たす微分方程式をすべて求める、もしくはホロノミックと呼ばれる強い微分方程式系を求める必要がある。与えられた関数に対して、それが満たす（すべての）線形偏微分方程式系は微分作用素環の左イデアルとなり、その関数の零化イデアルと呼ばれる。しかし、与えられた関数に対してその零化イデアルを定めることは一般には非常に困難であり、アルゴリズムが知られているのは上記の多項式の複素数冪（のいくつかの積）の場合など、ごく一部の関数に限られている。さらに微分可能でない関数も考察の対象に含める必要があり、その場合は関数を超関数（一般化関数）と見なすことにより D 加群の枠組みで定式化することが可能であると期待された。

2. 研究の目的

上記のような状況に鑑み、D 加群の一般的なアルゴリズムを具体的な関数や超関数に適用するために新たなアルゴリズムを構築することと、計算実験を通して新たな知見を得ることを研究目的とした。特に次の 3 点を具体的な研究目標として設定した。

(1) 与えられた多変数多項式に対してその複素数冪や指数関数が満たす微分方程式系を計算するアルゴリズムは既知（前者は本研究代表者による）であるが、それを拡張して例えば多項式の対数の満たす微分方程式系を正確に求めること。多項式の対数は多項式の複素数冪を冪に関して微分すると現れるため D 加群の理論においても重要である。

(2) 与えられたホロノミック関数、すなわちホロノミック系と呼ばれる強い線形偏微分方程式系を満たす関数に対して、そのいくつかの変数に関する全空間上の積分が満たすホロノミック系は、D 加群の積分アルゴリズムにより計算できることが本研究代表者らにより知られていたが、積分領域が全空間ではなく、いくつかの多項式不等式により定義されている場合に積分の満たすホロノミック系を計算するアルゴリズムを構成し、種々の具体例に適用すること。

(3) 与えられた超関数の満たす偏微分方程式系を求めることは一般には非常に困難であり、デルタ関数など簡単な場合にしか知られていない。そこで与えられた実多変数多項式の定める特異点を持つ超曲面上に台を持つ超関数を考察し、それが満たす偏微分方程式系を求めること。特異点がない場合は通常のデルタ関数に対応するため、重要な問題であると考えられる。

3. 研究の方法

まず D 加群についての既知のアルゴリズムを整理し、国産の数式処理システム Risa/Asir 上でプログラムを作成し、その効率性の検証を行った。D 加群のアルゴリズムのほとんどは、微分作用素環におけるグレブナー基底計算に依存している。グレブナー基底の概念とアルゴリズムは多項式環の場合に Buchberger により導入され、現在では数式処理ソフトウェアの主要な機能の 1 つとなっているが、微分作用素環のグレブナー基底を計算できるソフトウェアはそれほど多くはない。本研究代表者は以前はその中の 1 つである高山信毅によって開発された Kan を用いていたが、その後、Singular や Risa/Asir など多項式環の計算で広く使われているソフトウェアに相次いで微分作用素環のグレブナー基底計算の機能が追加された。特に Risa/Asir は日本で開発されたフリーソフトウェアであり、研究者の間ではその計算能力についての評価が高い。そこで D 加群のアルゴリズム

を Risa/Asir を用いて実現するために Risa/Asir のユーザ言語を用いてプログラムを作成した。

次にそのプログラムを用いて計算実験を行い、計算効率についての検証を行った。その結果、2つの関数の積が満たす微分方程式系は D 加群のテンソル積として計算できるが、その計算効率が積分の満たす微分方程式系の計算においてはしばしばボトルネックとなることが明らかとなった。そこで、実際に必要となる場合に限って積の満たす微分方程式系の効率的な計算方法について理論と計算実験の両面から研究を進めた。

また、統計学における積分の例について竹村彰通氏と共に研究を行い、実際に D 加群のアルゴリズムが適用できることを確認した。

一方、与えられた実多変数多項式 f に対して、その複素数冪 f^s は D 加群理論における重要な対象であるが、実領域で考察するには超関数 f_+^s とみなす必要があり、そうすると s について超関数を値にとる有理型関数となることが知られている。そこで s の極における f_+^s のローラン展開を求めることが最も基本的な問題である。特に $s=-1$ における f_+^s の超関数としての留数は、超曲面 $f=0$ が特異点を持たない場合はデルタ関数になるので、その拡張として興味深い超関数である。一方、デルタ関数は複素領域では局所コホモロジー類とみなすことができ、上記の超関数と密接に関係すると思われる。局所コホモロジーの計算アルゴリズムは本研究代表者により既に得られており計算可能である。そこで、いくつかの比較的簡単な多項式 f について、超関数としての留数の満たす微分方程式系を理論的に求め、局所コホモロジーの満たす微分方程式系と比較した。

4. 研究成果

一般に関数または超関数がホロノミック関数（または超関数）であるとは，ホロノミック系と呼ばれる強い線形偏微分方程式系を満たすことである。有理関数やその指数関数、対数関数など、更にベッセル関数や種々の超幾何関数などが典型的なホロノミック関数である。

本研究代表者らによって導入された D 加群の基本演算のアルゴリズムを具体的なホロノミック関数、あるいは更に一般にホロノミック超関数に適用し、次のような研究成果を得た.

(1) 多項式 f, 複素数 s, 自然数 m に対して多価解析関数 $f^s(\log f)^m$ の満たすホロノミック系、すなわち微分作用素環における零化イデアルを正確に計算するアルゴリズムを導いた. f^s の零化イデアルについては本研究代表者によって一般的なアルゴリズムが得られていたが、そのアルゴリズムを s についての微分を含む形に拡張することにより、$f^s(\log f)^m$ の零化イデアルの計算アルゴリズムを構成した。実際に数式処理システム Risa/Asir を用いてプログラミングを行い、このアルゴリズムは効率が良く、m があまり大きくなければ研究目的にも十分利用できることを確認した。更にこのアルゴリズムを項目 (4) の f_+^s の極におけるローラン展開の係数の満たすホロノミック系の計算に応用した。

(2) ホロノミック関数の変数のいくつかの多項式不等式で定義された領域上の積分は、残りの変数に関して再びホロノミック関数になることが D 加群の理論から保証されているが、具体的に積分の満たすホロノミック系を計算するアルゴリズムを構成した。従来の方法を適用しようとすると積分領域の境界における境界条件を考慮する必要があり、複雑な領域に対して境界条件を考慮した一般的な計算アルゴリズムを構成するのは困難である。そこで積分領域が多項式不等式 $f_1 \geq 0, \ldots, f_m \geq 0$ で定義される場合にヘビサイド関数 $Y(t)$ を用いて $Y(f_1)\cdots Y(f_m)$ という不連続関数（積分領域の定義関数）を導入し、これが超関数として満たすホロノミック系を計算するアルゴリズムを導入した。これは多価解析関数 $f_1^{s_1}\cdots f_m^{s_m}$ の満たすホロノミック系を $s_1=\cdots=s_m=0$ に制限することにより得られる. 次に被積分関数 u の満たすホロノミック系と $Y(f_1)\cdots Y(f_m)$ の満たすホロノミック系から積 $uY(f_1)\cdots Y(f_m)$ の満たすホロノミック系を計算する必要があるが、そのために D 加群のテンソル積の計算を実行すると、少し複雑な場合になると計算量の問題で終了できず、全体の計算の中でボトルネックとなることが明らかとなった。そこで、テンソル積の計算を経由せずに $uY(f_1)\cdots Y(f_m)$ の満たすホロノミック系を計算する方法として、まずパラメータ $s_1,\ldots,s_m$ を含めて $uf_1^{s_1}\cdots f_m^{s_m}$ を満たす微分方程式系をテンソル積を用いずに計算し、その後で $s_1=\cdots s_m=0$ を代入するという方法を用いた。これによって上記の計算量のボトルネックの問題はほぼ解消され、最も計算量の多いステップは D 加群の積分計算アルゴリズムとなった。D 加群の

積分（または制限）の計算アルゴリズムは D 加群のアルゴリズムの中で中心的な位置を占めており、このアルゴリズムの効率化は今後に残された課題である。また竹村彰通氏と共同でこのアルゴリズムを多次元正規分布に適用し、3 次元程度の場合には十分実用になることを確認した。

(3) 多項式の代数的局所コホモロジーと、それに付随した超関数の満たす微分方程式系の比較定理を証明した。与えられた多変数多項式 f に対してその局所コホモロジー類 $[f^{-1}]$ の零化イデアルの計算アルゴリズムは本研究代表者により得られていた。一方でホロノミック超関数の興味深い例として実係数多項式 f に対して s を複素数の正則パラメータとする超関数 f_+^s がある。この超関数は s について複素平面全体で有理型になることが知られており、その極におけるローラン展開を求めることは重要な問題である。その手始めとして、まず f_+^s の $s=-1$ における超関数の意味での留数が満たすホロノミック系を求めることを目標として研究を進めた。留数の零化イデアルを正確に計算するアルゴリズムは未だ得られていないが、いくつかの簡単な場合には具体的な計算により決定することができた。超曲面 $f=0$ が特異点を持たない場合は、留数の零化イデアルと局所コホモロジー類 $[1/f]$ の零化イデアルは一致することが容易に証明できる．しかし f が特異点を持つ場合は両者の零化イデアルは一般には一致しない。実際、双方の向きの真の包含関係がそれぞれ成立する例を構成した。さらにそれぞれの包含関係が成り立つための f についての十分条件を、f の b 関数の整数根と実超曲面 $f=0$ についての幾何学的な条件とを用いて記述した。この結果を導く際に、D 加群のアルゴリズムを用いた計算実験が有効であった。

(4) s を複素パラメータとする超関数 f_+^s の極におけるローラン展開の係数が超関数として満たすホロノミック系を求めるアルゴリズムを構成した。通常の有理型関数の極における留数はテイラー展開により計算することができる。同様にして f_+^s のローラン展開の係数を求めるには s について逐次微分する必要があり、$f_+^s(\log f)^m$ という形の超関数を考察する必要がある。この超関数の満たすホロノミック系は前項 (1) のアルゴリズムにより求めることができる。これを用いて f_+^s の極におけるローラン係数が満たすホロノミック系の計算アルゴリズムが得られた。しかし、このアルゴリズムで得られたホロノミック系が f_+^s の零化イデアルと一致するかどうかは不明である。比較的簡単な場合には前項 (3) の問題と関連して、一致することが確認できたが、一般には未解決である。

5. 主な発表論文等

[雑誌論文]（計 4 件）

① T. Oaku: Annihilators of distributions associated with algebraic local cohomology of a hypersurface. Complex Variables and Elliptic Equations. DOI:10.1080/17476933.2012.751100 (査読有, 印刷中)

② T. Oaku: Algorithms for integrals of holonomic functions over domains defined by polynomial inequalities. Journal of Symbolic Computation 50 (2013), 1–27. DOI:10.1016/j.jsc.2012.05.004 (査読有)

③ R. Bahloul, T. Oaku: Local Bernstein-Sato ideals: algorithm and examples. Journal of Symbolic Computation 45 (2010), 46–59. DOI: 10.1016/j.jsc.2009.06.004 (査読有)

④ T. Oaku: Regular b-functions of D-modules. Journal of Pure and Applied Algebra 213 (2009), 1545–1557. DOI: 10.1016/j.jpaa.2008.11.020 (査読有)

[学会発表]（計 11 件）

① 大阿久俊則: Laurent expansion of the complex power as distribution. 研究集会「代数解析学と局所凸空間」、日本大学理工学部、2014 年 2 月 17 日

② 大阿久俊則: Algorithms for D-modules applied to the complex power and the local zeta function associated with a real polynomial. 筑波大学解析セミナー、筑波大学、2013 年 10 月 30 日

③ T. Oaku: Algorithms for D-modules applied to generalized functions. Workshop ‘Algebra, Algorithms and Algebraic Analysis’, Rolduc Abbey, the Netherlands, 2013 年 9 月 6 日

④ 大阿久俊則: Operational calculus for distributions with a holomorphic parameter. 研究集会 'Several aspects of algebraic analysis', 日本大学理工学部、2013 年 3 月 16 日

⑤ T. Oaku: An algorithm to compute the differential equations for the logarithm of a polynomial. The 37th International Conference on Symbolic and Algebraic Computation, Grenoble University, France, 2012 年 7 月 25 日

⑥ 大阿久俊則: Operational residue calculus for the complex power of a polynomial. Risa/Asir Conference 2013 + 第 4 回六甲博多計算代数会議、神戸大学、2012 年 3 月 22 日

⑦ 大阿久俊則: Realification of algebraic local cohomology. 研究集会「超局所解析とその展望」、日本大学理工学部、2012 年 3 月 9 日

⑧ 大阿久俊則: 超曲面に台を持つデルタ関数と代数的局所コホモロジー. 超幾何方程式研究会 2012、神戸大学、2012 年 1 月 6 日

⑨ T. Oaku: Holonomic distributions and local cohomology. Microlocal Analysis and Related Topics, 埼玉大学東京ステーションカレッジ、2011 年 12 月 14 日

⑩ 大阿久俊則: 定積分の満たす微分差分方程式系の計算アルゴリズム. 第 3 回六甲博多計算代数会議、神戸大学、2011 年 3 月 23 日

⑪ T. Oaku: Holonomic functions revisited. The Joint Conference of ASCM 2009 and MACSIS 2009, 福岡市、2009 年 12 月 17 日

[図書]　（計 1 件）

① T. Oaku: An algorithm to compute the differential equations for the logarithm of a polynomial. Proceedings of the 37th International Conference on Symbolic and Algebraic Computation pp. 273–280. ACM Press, 2012 (査読有)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

大阿久　俊則（OAKU, Toshinori）
東京女子大学・現代教養学部・教授
研究者番号： 60152039