

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 6 月 3 日現在

機関番号：32708

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2009～2012

課題番号：21540203

研究課題名（和文） 2次元 polynomial skew products の力学系の研究

研究課題名（英文） A study on the dynamics of two dimensional polynomial skew products

研究代表者

中根 静男（SHIZUO NAKANE）

東京工芸大学・工学部・教授

研究者番号：50172359

研究成果の概要（和文）： C^2 の Axiom A polynomial skew products に対し、危点集合の軌道の振る舞いと saddle basic sets の安定多様体と不安定多様体の交叉との関係を解析することにより、危点集合の通常集積点集合 A 、点別集積点集合 Apt 及び連結成分別集積点集合 Acc に関する種々の性質を、saddle basic sets を用いることによって特徴づけた。更に、これらの性質が hyperbolic components の中で保たれることを示した。また、次数が高い場合に特有な性質を持つ写像の例を構成した。

研究成果の概要（英文）：Investigating the link between postcritical behaviors and the relations of saddle basic sets for Axiom A polynomial skew products on C^2 , we characterized some properties of the three kinds of accumulation sets of the critical set in terms of the saddle basic sets. We also showed that these properties are preserved in the hyperbolic components. We gave an example with a property characteristic to the higher degree maps.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2009 年度	900,000	270,000	1,170,000
2010 年度	700,000	210,000	910,000
2011 年度	700,000	210,000	910,000
2012 年度	700,000	210,000	910,000
年度			
総計	3,000,000	900,000	3,900,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：複素解析，複素力学系，Axiom A, skew product, base Julia 集合，fiber Julia 集合，saddle basic set

1. 研究開始当初の背景

高次元複素力学系においても、1次元の場合と同様に、危点の挙動が決定的に重要である。しかし、危点の挙動と力学系の関係は必ずしも1次元のときほど十分には解明されていない。危点集合が1次元のときは有限集合だったが、2次元では代数曲線になり、その全体の挙動を調べるのが困難なためである

う。それでも C^2 の skew product は $f(z, w) = (p(z), q(z, w))$ という形をしていて、 z 平面上では写像 p の1次元力学系であり、 f は各 fiber $\{z = a\}$ を別の fiber $\{z = p(a)\}$ に写すため、各 fiber 上では1次元写像の random iteration になる。そのおかげで、1次元の理論がかなり利用できるため、比較的扱いやすい。

2次元 polynomial skew products の力学系について、M. Jonsson は基本的な枠組みを設定した上で諸性質を証明した。例えば、危点集合の軌道が第2 Julia 集合と交わらないことが Axiom A であるための必要十分条件であることを証明したが、これは1次元の双曲性の特徴付けの一般化である。最近、L. DeMarco と S. Hruska は Jonsson の仕事を発展させて、Axiom A polynomial skew product の危点集合の集積点集合として、通常集積点集合 A に加えて、点別集積点集合 Apt と連結成分別集積点集合 Acc を定義し、 Apt と A を特徴付けた。さらに、これらの集合が種々の関係を満たすような実例を構成した。ただし、彼女たちは主に2次元の場合を考察したために、base Julia 集合 J_p は連結か完全不連結の場合に限られていて、論文の最後に、 J_p が連結でも完全不連結でもない場合に、いくつかの問題を提起している。

R. Roeder と S. Hruska は C^2 の polynomial skew products の Fatou set のトポロジーを研究し、その第一ホモロジー群が無限生成になる場合を考察した。R. Roeder は Fatou 成分がすべて4次元の ball と同相になるためには f が連結である (base Julia 集合とその上の fiber Julia 集合がすべて連結である) ことが必要十分であることを示した。

2. 研究の目的

本研究では、 C^2 の polynomial skew products の複素力学系について、特に危点の挙動が力学系をどこまで決定できるかを解明する。そのために、危点集合の集積点集合の諸性質を解明し、その集積点集合の性質によって写像を分類し、その性質をもつ実例を構成する。具体的には、DeMarco-Hruska の提起した次の問題を解決する。

(1) base Julia 集合が連結でも完全不連結でもない Axiom A polynomial skew product の例で次の各性質を満たすものを求める。

- (a) $Apt = Acc \neq A$
- (b) $Apt \neq Acc = A$
- (c) $Apt \neq Acc \neq A$

必然的に、3次元以上の写像を考察することになる。

(2) $Acc = A$ の特徴づけを与える。

これは、base Julia 集合が不連結な場合に意味がある。

(3) 連結だが base Julia 集合上の fiber Julia 集合が同相でないような例が存在するか解明する。

3. 研究の方法

Polynomial skew products の力学系に関する基本的な方法は Jonsson が確立している。DeMarco-Hruska は J_p 上の力学系、特に危点集合の振る舞いについて考察し、新たな概念と問題を提示した。高次の場合を扱うためには、1次元の高次多項式の力学系の理論からのアイデアが必要になる。それは、不連結な Julia 集合の性質と、実 biquadratic 写像族の力学系である。また、Axiom A 実力学系の理論、特に basic sets の間の関係に関する諸性質も重要な役割を果たす。

1次元複素力学系においてはコンピュータによる Julia 集合や Mandelbrot 集合の可視化により研究が著しく進展したが、高次元複素力学系においてもコンピュータによる数値実験は重要な方法を提供する。高次元の場合は、一般的には対象全体を描画することが難しい。しかし、2次元 skew product に限ると、base 空間と fiber 空間が各々1次元で、ちょうど1次元の場合のパラメータ空間と相空間に対応しているため、1次元の場合と同様なアルゴリズムで描画することにより対象を可視化できる。そのおかげで fiber Julia 集合のトポロジカルな性質を数値実験により予想したり確認したりできるのである。これは2次元 skew products の力学系の研究の一つのメリットである。

筆者の身近には同じ分野の研究者がいないので、国内外の研究者と討論することにより研究を進展させる。特に、京都大学の宍倉光広氏、木坂正史氏、稲生啓行氏とは主に1次元複素力学系について討論した。宍倉氏には skew product の fiber Julia 集合の描画ソフトウェアについても相談にのってもらった。大阪大学の角大輝氏とは、彼の構成した skew product の例について討論する中で、DeMarco-Hruska の論文の誤りを発見することにつながった。イリノイ大学の L. DeMarco からは skew product について討論する中で種々の助言を得ることができた。インディアナ大学の R. Roeder とは、polynomial skew products に対する holomorphic motion の理論について討論し、base Fatou 集合上での力学系を考察するという問題を得ることができた。

本研究で得られた成果は国内外の研究集会等で発表した後に論文として雑誌

“Ergodic Theory and Dynamical Systems” に投稿し、掲載が決定している。オンライン上には既に掲載されている。

4. 研究成果

危点集合を C , saddle basic set Λ_i の安定集合を W_i とし、 $C_i = C \cap W_i$ とする。以下の結果を得た。

- ① J_p が不連結のとき、 $\text{Acc} = A$ ならば $\text{Apt} = A$ が成り立つ。
- ② J_p が連結でも完全不連結でもなく、 $\text{Apt} = \text{Acc} \neq A$ を満たす例を構成した。
- ③ $\text{Apt} = \text{Acc}$ となるためには、 C のすべての連結成分が C_i のどれかひとつに含まれることが必要十分である。
- ④ $\text{Apt} = A$ となるためには、すべての C_i が閉集合になることが必要十分である。
- ⑤ $\text{Apt} = \text{Acc}$, $\text{Acc} = A$, $\text{Apt} = A$ の各性質は hyperbolic components の中で保たれる。
- ⑥ Λ_i の不安定多様体と Λ_j の安定多様体が変わるためには、 C_j の閉包と C_i が交わる必要十分である。
- ⑦ Λ が solenoid になるような新しい例を構成した。

これまで得られていた結果は本質的に 2 次の場合であったが、上記の①と②は、次数が高い場合をはじめ扱ったものである。①は上記 2. で挙げた問題 (1) の性質 (b) を満たす写像は存在しないことを意味する。更に、 J_p が連結ならば $\text{Acc} = A$ が成り立つので、①は問題 (2) の解答をも与えている。②は性質 (a) を満たす写像の例を与えている。性質 (c) を満たす写像は存在すると予想しているが、まだ証明できていない。

また、③と④は、saddle basic sets の間の関係に着目することにより、DeMarco-Hruska の論文の中の誤りを克服し、正しい特徴づけを与えたものである。⑤の 1 部は DeMarco-Hruska も証明していたが、③、④と①の結果を用いることにより、三つの場合を統一的に見通しよく証明することができた。⑥は saddle basic sets の間にあるための特徴づけを与えたもので、④を示す上で本質的な役割を果たした。⑥によって、彼女たちの論文では明確でなかった諸性質の関係を明快に記述できるようになった。

⑦は上記の結果から付随して得られたものである。写像を摂動したとき、第 2 Julia 集合は同相に変形されるが、saddle set は同相とは限らない。ここでは、saddle set が円周だった写像を摂動したとき solenoid に変わるような例を構成した。

以上は J_p 上の saddle basic sets の間の関係を考察したのだが、写像 p の吸引的周期点の集合 A_p 上にも saddle set があり、それらの間の関係を考察することも興味深い問題である。実際、E. Bedford と M. Jönsson が外射線の着地性を示す際に、両者の間に関係がないことを示すことが本質的であった。彼らは C^2 の一般の多項式写像を扱っているので証明は難解だが、skew product に限ればより一般の状況でも初等的に証明できることが期待される。この場合

は base Fatou 集合上の危点の振る舞いも解析する必要がある。最近、 A_p 上の saddle set と J_p 上の saddle set の間に関係がないことと base filled Julia 集合 K_p 上 fiber Julia 集合が連続であることが同値であること、そして、連結で p の危点がすべて周期的ならば、両者の間に関係がないことがわかった。Base Fatou 成分上 fiber Julia 集合は同相なので、その境界である base Julia 集合の近傍でのまでの fiber Julia 集合の挙動を考察することにより、上記の問題 (3) の解答が得られるのではないかと予想している。これは、1 次元の時の外射線の着地性、すなわち holomorphic motion の境界での挙動を考察することに対応していて、それ自身興味深い問題である。これらは今後の課題である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 8 件)

① Shizuo Nakane, Postcritical sets and saddle basic sets for Axiom A polynomial skew products on C^2 . Ergodic Theory and Dynamical Systems, 査読有, 掲載決定. DOI:10.1017/S0143385712000193.

② Toru Yanagawa, Shizuo Nakane, et.al. (12 名中 5 番目), A novel method for evaluating postsurgical results of unilateral cleft lip and palate with the use of Hausdorff distance. Oral Surg Oral Med Oral Pathol Oral Radiol, 査読有, Vol. 114, 2012, pp.704-711. DOI:10.1016/j.oooo.2012.01.042.

③ Toru Yanagawa, Shizuo Nakane, et.al. (14 名中 5 番目), Presurgical nasolabial molding orthopedic treatment improves the outcome of primary cheiloplasty of unilateral complete cleft lip and palate, as assessed by naris morphology and cleft gap. Journal of Craniofacial Surgery, 査読有, Vol. 23, 2012, pp.1596-1601. DOI:10.1097/SCS.0b013e31825196dc.

④ Shizuo Nakane, On saddle basic sets for Axiom A polynomial skew products on C^2 . 数理解析研究所講究録, 査読無, Vol. 1807, 2012, pp.66-73.

⑤ Shizuo Nakane, Postcritical sets and saddle basic sets for Axiom A polynomial skew products on C^2 . 数理解析研究所講究録, 査読無, Vol. 1762, 2011, pp.114-119.

⑥ Shizuo Nakane, Component-wise accumulation sets for Axiom A polynomial skew products. 数理解析研究所講究録, 査読無, Vol. 1699, 2010, pp.81-87.

⑦ Shizuo Nakane, Remarks on Axiom A polynomial skew products of higher degrees. Proceedings of ICFIDCAA, 査読有, Vol.16, 2009, pp.196-200.

⑧ Shizuo Nakane, Branner-Hubbard-Lavaurs deformations for real cubic polynomials with a parabolic fixed point. Conformal Geometry and Dynamics, 査読有, Vol. 13, 2009, pp.110-123.
DOI: 10.1090/S1088-4173-09-00192-1.

[学会発表] (計 5 件)

① Shizuo Nakane, On saddle basic sets for Axiom A polynomial skew products on C^2 . RIMS 研究集会”複素力学系の総合的研究”, 2012年1月26日, 京都大学数理解析研究所.

② Shizuo Nakane, Postcritical sets and saddle basic sets for Axiom A polynomial skew products on C^2 . RIMS 研究集会”複素力学系とその周辺分野の研究”, 2010年12月9日, 京都大学数理解析研究所.

③ Shizuo Nakane, Postcritical sets and saddle basic sets for Axiom A polynomial skew products on C^2 . 日本数学会秋季総合分科会, 2010年9月23日, 名古屋大学.

④ Shizuo Nakane, Dynamics of Axiom A polynomial skew products, 国際数学会議, 2010年8月24日, インド, ハイデラバード.

⑤ Shizuo Nakane, Component-wise accumulation sets for Axiom A polynomial skew products. RIMS 研究集会”複素力学系とその関連分野の総合的研究”, 2009年12月16日, 京都大学数理解析研究所.

[その他]

ホームページ等

<http://www.gen.t-kougei.ac.jp/math/nakane/index.html>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

中根 静男 (SHIZUO NAKANE)

東京工芸大学・工学部・教授

研究者番号: 50172359

(2) 研究分担者

()

研究者番号:

(3) 連携研究者

()

研究者番号: