様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２６ 年　 ６ 月　 ３ 日現在

機関番号：１１１０１
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2009～2013
課題番号：２１５４０２０６
研究課題名（和文）非局所的に相互作用を及ぼす波動の解析について

研究課題名（英文）On analysis of interacting nonlocal waves

研究代表者
津田谷　公利（Tsutaya, Kimitoshi）

弘前大学・理工学研究科・教授

研究者番号：６０２５０４１１

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　3,400,000円、（間接経費）　1,020,000円

研究成果の概要（和文）：ハートリー型波動方程式の初期値問題・散乱問題について研究を行い，時間大域解の存在，有限時間における解の爆発，散乱作用素の存在，漸近自由にならない解に関する結果を得た．散乱作用素が存在するための，初期値やポテンシャルの減衰度に関するほぼ最良の条件を明らかにした．また，ハートリー型ディラック方程式，半相対論的ハートリー方程式についても散乱作用素の存在に関する結果を得た．

研究成果の概要（英文）：We studied the Cauchy and scattering problems for the wave equation of Hartree type. We obtained results on the existence of global solutions, blow-up in finite time, the existence of scattering operators and no scattering. We showed the existence of scattering operators under almost optimal conditions on potentials and initial data in terms of decay. We also proved the existence of scattering operators for the Dirac equation of Hartree type and the semirelativistic Hartree equation.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：波動方程式　ディラック方程式　ハートリータイプ　散乱問題　時間大域解　漸近挙動

１．研究開始当初の背景

自然界には複数の素粒子が互いに影響を及ぼし合いながら運動している現象が見られる．２０世紀前半，イギリスの理論物理学者ハートリーはハートリー近似と呼ばれる，多電子系の波動関数を求める近似法を提案した．これは多電子原子に対する代表的な近似方法の１つである．この方法によると，波動関数はある非線型シュレディンガー方程式の解として表される．その非線型項は非局所的相互作用を記述し，ハートリー項と呼ばれる．ハートリー項の特徴は合成積があり，その中にポテンシャルが入っていることである．ハートリーによって生み出された本来の方程式のポテンシャルはクーロンポテンシャルであるが，これを冪乗型関数に一般化した場合についても数学的に研究され，多くの研究結果が得られてきた．これらはシュレディンガー方程式についてであるので，非相対論的な場合を扱っているといえる．

一方，相対論的かつ質量項がない場合を扱う方程式は波動方程式である．ハートリー型波動方程式についての研究結果は同じタイプのシュレディンガー方程式と比べて非常に少なく，解決すべき問題は多く残っている．ハートリー型の相対論的な場合として他にディラック方程式も考えられる．

２．研究の目的

ポテンシャルが冪乗型であり，合成積の中の非線型項が冪乗型に一般化された場合を考える．これを一般化されたハートリー型と呼ぶことにしよう．

本研究の目的は，一般化されたハートリー型波動方程式，ディラック方程式の時間大域解および散乱作用素が存在するためのポテンシャル項および初期値についての条件を明らかにすることである．各方程式について詳しく述べる．以下，いずれも初期値は小さいと仮定する．

(1) 一般化されたハートリー型波動方程式

研究代表者は空間３次元において時間大域解が存在するための初期値の無限遠方での減衰度とポテンシャルの冪，非線型項の冪の間の関係を明らかにしたので，本研究では解の爆発が起こる条件を突き止める．また，空間２次元における時間大域解の存在および解の爆発を示す．

(2)一般化されたハートリー型ディラック方程式

研究代表者と連携研究者の町原氏は散乱作用素が存在するためのポテンシャルの冪，非線型項の冪，空間次元，ソボレフ指数の間の関係を明らかにした．本研究では散乱作用素が存在するためのポテンシャルの冪についての条件をさらに弱める．

３．研究の方法

(1) 波動方程式

解の爆発を示すには時間局所解の積分評価および各点評価を用いる．解を下から評価していくことで爆発条件を求める．また，時間大域解の存在を示すには自由解の減衰評価を基にした重み付きノルム評価を用いる．

(2) ディラック方程式

ディラック方程式に対する通常のストリッカーツ評価式を用いた場合を参考にしながら，別のタイプの時空評価式を使って散乱作用素の存在条件を突き止めていく．

４．研究成果

ハートリー型波動方程式と同タイプのディラック方程式に分けて述べる．

(1) ハートリー型波動方程式

空間３次元の場合．初期値の無限遠方での減衰度を k，ポテンシャルの冪を $-\gamma$，非線型項の冪を p とする．

①　ポテンシャルの無限遠方での減衰が速い($\gamma \geqq 1$)とき．

初期値の無限遠方での減衰が速い($k>1$)場合．自由解の減衰評価を基にした重み付きノルムによる合成積の評価を最初に求めた．重み付きノルム法はF. John によって１９７０年代後半に始められた．合成積評価はγと２との大小関係によって３通りの場合分けをしなければならない．研究代表者が前に通常型ハートリーの場合($p=3$)で得た評価式の拡張にあたる．次にこの合成積評価式を土台として，方程式の時間大域解を構成し，さらにエネルギーノルムの意味で自由解に漸近することも示した．したがって，$k>1$ の場合では時間大域解は自由解に漸近する．通常型ハートリーの場合($p=3$)に限ってみると，$\gamma=2$ のとき時間大域解存在条件でギャップがこれまであったのだが，その隙間を完全に埋めることができた．

初期値の無限遠方での減衰が遅い($k\leqq 1$)場合．自由解の減衰評価は$k>1$のときと異なるので違う重み付きノルムを用いる．合成積評価を求めた後時間大域解存在を示した．さらに，p，k，γがある条件をみたすとき散乱作用素が存在することも証明した．逆に p，k，γがこの条件をみたさない場合，時間大域解が必ずしも自由解に漸近しないことを示すこともできた．ハートリー型でも冪乗型と同じ現象が起こりうるのである．

散乱作用素の存在を示すにあたり，非線型項が空間二乗可積分にならない場合があり，これまでになかった重み関数を導入した．ハートリー型の場合，冪乗型と異なり合成積をまず評価しなければならない．その際，冪乗型では見られないような評価式が現れる．このような評価式が出てくる場合，従来用いられてきた重み関数は必ずしも機能しない．今

回導入した重み関数はその欠点を補ってくれる．ハートリー型のような非局所項をもった波動方程式ではこの新しい重み付きノルムによる手法が有効であると期待される．

② ポテンシャルの減衰が遅い($\gamma < 1$)とき．上記の重み付きノルムによる手法によって初期値問題の解が，ポテンシャルの減衰が速いときと同じ条件の下で時間大域的に存在することを示すことができた．

上記①②のいずれの場合においても時間大域解の存在条件をみたさないとき，解の爆発が起こることを示した．R. Glassey による積分評価法および F. John による各点評価法を用いて示される．この結果から時間大域解が存在するかどうかの境目である臨界条件が明らかになった．

空間２次元の場合．
解の爆発が起こる条件を求めることはできた．一方，時間大域解存在の条件はまだ最良ではなく改善の余地がある．

(2) ディラック方程式
ソボレフ空間の指数を s，空間次元を n，非線型項の冪を p とする．空間次元が３次元以上の場合，研究代表者は連携研究者の町原氏とともに散乱作用素が存在することを示し，n,s,p に関する散乱作用素の存在条件を明らかにしたが，空間２次元の場合でも同様の結果が成り立つことを証明した．特徴としては $p>3$ のとき，方程式のスケール不変から定まるソボレフ臨界指数を含めてよい場合があることである．$p=3$ のときは劣臨界ソボレフ指数しか扱えない．証明ではストリッカーツ評価とよばれる時空評価式，および Escobedo-Vega の補間不等式を用いる．

続いて，散乱作用素が存在するための，ポテンシャルの冪についての条件がさらに弱められないかどうかを研究した．２つのタイプのストリッカーツ評価式を使うことによって，ポテンシャルの冪についての条件を弱めることに成功した．特に通常のハートリー型($p=3$)に対しては，ポテンシャルの冪の下界を 1/2 下げることができ，また以前扱えなかった $p=3$ かつ空間２次元の場合も含めることができた．また時空評価式の一方の代わりにある減衰評価を用いると証明の一部は簡易化され，初期値の滑らかさの仮定も弱まることが判明した．ただ，空間１次元については，この滑らかさの仮定を弱めるためには非線型項に関してある条件が必要となる．

半相対論的ハートリー方程式について．
これまでに知られている時間大域解存在の結果ではポテンシャルの冪の条件にギャップがあった．ディラック方程式における上述の方法を適用すると，このギャップは一部埋まることが明らかになった．空間４次元以上では完全にギャップが埋まる．３次元では臨界値を除いて埋まる．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　５　件）

① K. Tsutaya, Weighted estimates for a convolution appearing in the wave equation of Hartree type, Journal of Mathematical Analysis and Applications 411 (2014), 719-731, 査読有.
http://dx.doi.org/10.1016/j.jmaa.2013.10.021

② K. Tsutaya, Scattering theory for the wave equation of a Hartree type in three space dimensions, Discrete and Continuous Dynamical Systems - A 34 no.5 (2014), 2261-2281, 査読有.
doi:10.3934/dcds.2014.34.2261

③ M. Nakamura and K. Tsutaya, Scattering theory for the Dirac equation of Hartree type and the semirelativistic Hartree equation, Nonlinear Anal. 75 (2012), no. 8, 3531-3542, 査読有.
doi:10.1016/j.na.2012.01.012

④ S. Machihara and K. Tsutaya, Scattering theory for the Dirac equation of Hartree type in 2+1 dimensions, Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications 71 no.12 (2009), e2437-e2441, 査読有.
doi:10.1016/j.na.2009.05.059

⑤ S. Machihara and K. Tsutaya, Scattering Theory for the Dirac Equation with a Nonlocal Term, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh 139A (2009) 867-878, 査読有.

〔学会発表〕（計　9　件）

① P. Karageorgis and 津田谷公利, On the asymptotic behavior of solutions of the wave equation of Hartree type，２０１４年３月１６日　日本数学会年会，学習院大学．

② K. Tsutaya, Global existence and asymptotic behavior of solutions to a Hartree-type wave equation, ２０１２年１月２５日，第２９回九州における偏微分方程式研究集会，九州大学.

③ K. Tsutaya, Global existence and asymptotic behavior of solutions for the Dirac equation of Hartree type, ２０１１年２月１５日，Nonlinear Wave and Dispersive equations，京都大学.

④ M. Nakamura and K. Tsutaya, Global existence and asymptotic behavior of solutions for the Dirac equation of Hartree type, ２０１０年９月２４日 日本数学会秋季総合分科会，名古屋大学.

〔図書〕（計　０　件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計　０　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計　０　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織
(1)研究代表者
津田谷　公利（TSUTAYA，Kimitoshi）
弘前大学・大学院理工学研究科・教授
研究者番号：60250411

(2)研究分担者
（　　　）

研究者番号：

(3)連携研究者
中村　誠（NAKAMURA，Makoto）
山形大学・理学部・教授
研究者番号：70312634

町原　秀二（MACHIHARA，Shuji）
埼玉大学・理学部・准教授
研究者番号：20346373

高村　博之（TAKAMURA，Hiroyuki）
公立はこだて未来大学・システム情報科学部・教授
研究者番号：40241781