

機関番号：12701

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2009～2013

課題番号：21540214

研究課題名(和文)関数解析的手法による微分方程式の解の存在とその性質についての研究

研究課題名(英文)Research on the existence of solutions of differential equations and their properties via functional analysis methods

研究代表者

塩路 直樹 (Shioji, Naoki)

横浜国立大学・工学研究院・教授

研究者番号：50215943

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,500,000円、(間接経費) 1,050,000円

研究成果の概要(和文)：Nehari多様体と考えられる楕円型方程式について、正值解の多重性については様々な結果が得られていたが、符号変化解の多重性の結果はあまりなかった。領域に関するカテゴリーを用いて、符号変化解についても、その個数の下からの評価を与えた。また、臨界指数を含む問題に対し、極限方程式のエネルギーレベルの2倍を超えるレベルの解の存在についての議論はあまりなかったが、そのような議論を行った。非線形楕円型方程式の球対称正值解の一意性についての研究を行った。スカラー場方程式については、多くの研究者が何年もかかってその一意性を証明した。スカラー場方程式を含む様々な方程式に応用できる一意性定理を示した。

研究成果の概要(英文)：For elliptic problems which have Nehari manifold structures, there were some results on the numbers of their positive solutions. However, the numbers of sign-changing solutions were not studied well. By using category on the domain, we give a result on a number of sign-changing solutions. For elliptic problems which have Sobolev's critical exponent, the existence of solutions whose level are greater than the two times of the level of the limit equation were not discussed well. We gave such an argument to show the existence of the multiple solutions.

We also studied the uniqueness of positive radial solutions for elliptic equations. The uniqueness of a positive radial solution of the scalar field equation has a long history. We gave a uniqueness result which is applicable to various equations including the scalar field equation.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：関数方程式論

1. 研究開始当初の背景

(1) 報告者は、非線形楕円型方程式の解の存在およびその多重性について研究を行ってきた。関連する研究の中で、解の多重性については、特に Nehari 多様体が考えられる状況で、正值解の多重性が主に研究されていたが、符号変化解の多重性の結果はあまりなかった。また、臨界指数を含む問題を考えると、極限方程式のエネルギーレベルを c としたとき、 $(c, 2c)$ の間の解をつかまえる手法はあったが、 $2c$ を越えるレベルの解についての議論は、有名な Bahri-Coron の結果や Bahri-Lions 以外の結果はあまりなかった。

(2) アニュラス領域における変分問題に対して、外径と内径の差を一定にして、内径を大きくしていったとき、正值解の個数はいくらかでも大きくなることが知られていた。単位球において Hénon 方程式 $-\Delta u = |x|^\alpha u^p$ を考え、 $\alpha \rightarrow \infty$ としたとき、アニュラスの問題と似たような面があることは知られていたが、そのすべてが解明されてはいなかった。

(3) 遠方で減衰するスカラー場方程式 $\Delta u(x) - u(x) + u(x)^p = 0$ の正值球対称解の一意性は、その完全な解決には何人も研究者の寄与があり、色々な拡張やいくつかの証明が得られていたが、どの結果も、その証明に難しい点を含んでいた。

2. 研究の目的

非線形楕円型方程式の解の存在および一意性、多重性の研究や、解の性質について研究を行う。微分方程式は、自然科学や工学、経済学など様々な分野で用いられており、解についての様々な性質を調べることは、応用においても大変重要な問題である。研究開始当初の背景欄で述べたような状況に対し、その状況をできるだけ解明し、微分方程式論の発展に貢献することを目的とする。

3. 研究の方法

研究課題についての新たな問題を設定し、既に得られている議論を参考にしながら、解決の道筋とどこに難しさがあるかを考える。解決が難しい点についてはじっくりと時間をかけて考える。考えたことを基にして、連携研究者とほぼ毎週開催しているのセミナーで議論を行った。セミナーでは、関連する論文や本も読み、知識を補った。研究課題に関連する情報を、研究会や本学で開催したセミナーなどからも得た。

問題や解決への道筋が適当であるかどうかの判断に、数式処理ソフトを用いることもある。特に楕円型方程式の球対称正值解の一意性の結果を示す際には、数式処理ソフトを大いに活用した。得られた成果は、国際会議や日本数学会、その他の研究集会などで発表した。

4. 研究成果

(1) 楕円型方程式の解の多重存在について

① Ω を \mathbb{R}^N の有界領域で $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ とし、Neumann 境界条件下で $-d^2 \Delta u + u = f(u)$ を考え、 $d > 0$ が十分小さいときに、符号変化解の解の個数に対する下からの評価を、 Ω の境界の配置空間のカテゴリーを使って与えた。また、 f が漸近的線形の場合に、Dirichlet 境界条件下で符号変化解の解の個数の下からの評価についても結果を得た。

② Ω を、中空で細い穴の開いたボールのような \mathbb{R}^N の有界領域 (空気穴のあるボールのような感じの領域) とし、Dirichlet 境界条件下の Bahri-Coron 問題 $-\Delta u = |u|^{4/(N-2)}u$ が、正值解の他にもう 1 つ解を持つことを示した。この問題は、極限方程式の汎関数のレベルを c とすると、 $c, 2c$ では Palais-Smale 条件が成立せず扱いが難しい。正值解は存在し、そのレベルは $(c, 2c)$ に含まれるが、正值解が一意だとすると、符号変化解が $2c$ を越えるレベルに得られることを示した。

③ Ω を \mathbb{R}^N の有界領域とし、Dirichlet 境界条件下で $-\Delta u - \lambda u = |u|^{4/(N-2)}u$ を考える。 $N \geq 5$ で、 λ が第 1 固有値以上のときの解の多重存在についての結果を得た。

④ \mathbb{R}^3 における開単位球において、Dirichlet 条件下で Hénon 方程式 $-\Delta u = |x|^\alpha u^p$ を考え、 α が大きくなると、直交群で不変ではない正值解の個数がいくらかでも大きくなることを示した。この問題は、2次元や4次元以上では比較的簡単なのだが、3次元の場合の扱いが難しいのである。

(2) 楕円型方程式の正值解の球対称性について

① \mathbb{R}^N の開単位球、球面幾何や双曲幾何による距離を考え、Dirichlet 境界条件の下における楕円型方程式 $\Delta u + f(|x|, u) = 0$ の正值解の球対称性を導く新たな条件を得た。

② \mathbb{R}^2 における単位円盤において、Dirichlet 境界条件下での楕円型方程式を考え、 $2\pi/n$ 回転について不変な正值解が原点で C^n 級であれば、

球対称となることを示した。その結果を Hénon 方程式に応用し、球対称ではない $2\pi/n$ 不変な正值解の個数についての評価を与えた。

(3) 楕円型方程式の正值球対称解の一意性について

Dirichlet 条件下において楕円型方程式 $\Delta u + g(|x|)u + h(|x|)u^p = 0$ を考え、新たな Pohožaev 関数を導入し、正值解の一意性についての結果を得た。その結果を用いると、スカラー場方程式や松隈方程式、調和ポテンシャルを持つ非線形シュレディンガー方程式など、これまで個別に得られていた正值解の一意性を統一的に示すことができる。また、これまでに得られていた正值解の一意性の証明はどれも難解であるが、非常に簡明な証明を与えた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 12 件)

- ① Existence of many nonradial positive solutions of the Hénon equation in R^3 , Journal of Convex Analysis 22, 掲載予定, 査読有, <http://www.heldermann.de/JCA/JCA22/jca22.htm>
- ② Naoki Shioji and Kohtaro Watanabe, Radial symmetry of n -mode positive solutions for semilinear elliptic equations in a disc and its application to the Hénon equation, Topological methods in nonlinear analysis 43, 269–285, 2014, 査読有, <https://www.tmna.ncu.pl/static/archives/vol-43-1.html>
- ③ Norimichi Hirano and Naoki Shioji, A geometric proof of the existence of two solutions of the Bahri-Coron problem, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics 47, 589–598, 2013, 査読有, 10.1007/978-1-4614-7333-6_54
- ④ Naoki Shioji and Kohtaro Watanabe, Uniqueness of positive radial solutions of $\Delta u + g(r)u + h(r)u^p = 0$ and its applications, 数理解析研究所講究録 1838, 64–70, 2013, 査読無, http://ci.nii.ac.jp/vol_issue/nels/AN00061013/ISS0000488976_ja.html
- ⑤ Naoki Shioji and Kohtaro Watanabe, A generalized Pohožaev identity and uniqueness of positive radial solutions of $\Delta u + g(r)u + h(r)u^p = 0$, Journal of differential equations 255, 4448–4475, 2013, 査読有 10.1016/j.jde.2013.08.017
- ⑥ Naoki Shioji, Existence of multiple sign-changing solutions for an asymptotically linear elliptic problem and the topology of the configuration space of the domain, Advances in Differential Equations 17, 471–510, 2012, 査読有, <http://projecteuclid.org/euclid.ade/1355703077>
- ⑦ Norimichi Hirano and Naoki Shioji, Existence of two solutions for the Bahri-Coron problem in an annular domain with a thin hole, Journal of Functional Analysis 261, 3612–3632, 2012, 査読有, 10.1016/j.jfa.2011.08.013
- ⑧ Zhijie Chen, Naoki Shioji and Wenming Zou, Ground state and multiple solutions for a critical exponent problem, NoDEA. Nonlinear Differential Equations and Applications 19, 253–277, 2012, 査読有 10.1007/s00030-011-0127-0
- ⑨ Naoki Shioji and Kohtaro Watanabe, Radial symmetry of positive solutions for semilinear elliptic equations in the unit ball via elliptic and hyperbolic geometry, Journal of Differential Equations 252, 1392–1402, 2011, 査読有, /10.1016/j.jde.2011.10.001
- ⑩ Naoki Shioji, Multiple sign-changing solutions for an asymptotically linear elliptic problem, 数理解析研究所講究録 1740, 167–175, 2011, 査読無, http://ci.nii.ac.jp/vol_issue/nels/AN00061013/ISS0000466815_ja.html
- ⑪ Naoki Shioji, Multiple sign-changing solutions for a semilinear Neumann problem and the topology of the configuration space of the domain boundary, Calculus of Variations and Partial Differential Equations 38, 317–356, 2010, 査読有, 10.1007/s00526-010-0371-x
- ⑫ Yoshihiro Mizuta, Takao Ohno, Tetsu Shimomura and Naoki Shioji, Com-

compact embeddings for Sobolev spaces of variable exponents and existence of solutions for nonlinear elliptic problems involving the $p(x)$ -Laplacian and its critical exponent, *Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ, Series AI, Mathematica* 35, 115–135, 2010, 査読有, <http://www.acadsci.fi/mathematica/Vol35/vol35.html>

〔学会発表〕(計 23 件)

- ① 塩路直樹, 渡辺宏太郎, 楕円型方程式 $\Delta u + \nabla \rho \nabla u / \rho - gu + hu^p = 0$ の正值球対称解の一意性とその非退化性について, 日本数学会 2014 年度年会, 2014 年 03 月 15 日 ~ 2014 年 03 月 18 日, 学習院大学
- ② 塩路直樹, ある種の楕円型方程式の正值球対称解の一意性とその非退化性について, 松山解析セミナー 2014, 2014 年 02 月 07 日 ~ 2014 年 02 月 08 日, 愛媛大学
- ③ Naoki Shioji, Uniqueness of positive radial solutions of $\Delta u + g(r)u + h(r)u^p = 0$, The international conference on nonlinear analysis and optimization, 招待講演, 2013 年 12 月 20 日 ~ 2013 年 12 月 22 日, 高雄 (台湾)
- ④ 塩路直樹, ある種の楕円型方程式の正值球対称解の一意性とその応用について, 第 117 回神楽坂解析セミナー, 2013 年 11 月 25 日, 東京理科大学
- ⑤ 塩路直樹, ある種の楕円型方程式の正值解の一意性とその応用について, 第 571 回「応用解析」研究会, 2013 年 10 月 26 日, 早稲田大学
- ⑥ Norimichi Hirano and Naoki Shioji, Two solutions for the Bahri-Coron problem, The eighth international conference on nonlinear analysis and convex analysis, 招待講演, 2013 年 08 月 02 日 ~ 2013 年 08 月 05 日, 弘前大学
- ⑦ Naoki Shioji, Uniqueness of positive radial solutions of $\Delta u + g(r)u + h(r)u^p = 0$ and its applications, The Asiain mathematical conference 2013, 招待講演, 2013 年 06 月 30 日 ~ 2013 年 07 月 04 日, 釜山 (韓国)
- ⑧ 塩路直樹, 渡辺宏太郎, 楕円型方程式 $\Delta u + g(r)u + h(r)u^p = 0$ の正值球対称解の一意性とその応用について, 日本数学会年会, 2013 年 03 月 20 日 ~ 2013 年 03 月 23 日, 京都大学
- ⑨ 塩路直樹, 楕円型方程式 $\Delta u + g(r)u + h(r)u^p = 0$ の正值球対称解の一意性とその応用について, 第 7 回非線形偏微分方程式と変分問題, 2013 年 02 月 08 日 ~ 2013 年 02 月 09 日, 首都大学東京
- ⑩ 塩路直樹, Some results on the positive solutions of the Hénon equation, International Workshop on Stationary Problems in Nonlinear Partial Differential Equations, 2013 年 01 月 24 日 ~ 2013 年 01 月 25 日, 佐賀大学
- ⑪ 塩路直樹, Uniqueness of positive radial solutions of $\Delta u + g(r)u + h(r)u^p = 0$ and its applications, RIMS 研究集会 常微分方程式の大域的定性理論とその応用, 2012 年 11 月 07 日 ~ 2012 年 11 月 09 日, 京都大学
- ⑫ 塩路直樹, 渡辺宏太郎, 円板上の楕円型方程式の n モード正值解の球対称性とその Hénon 方程式への応用, 日本数学会秋季総合分科会, 2012 年 09 月 18 日 ~ 2012 年 09 月 21 日, 九州大学
- ⑬ 塩路直樹, 円板上の楕円型方程式の n モード正值解の球対称性とその Hénon 方程式への応用, 愛知教育大学における微分方程式セミナー, 2012 年 09 月 06 日 ~ 2012 年 09 月 07 日, 愛知教育大学
- ⑭ 塩路直樹, Partial radial symmetry of positive solutions for semilinear elliptic equations in a disc and its application to the Hénon equation, Spring school on nonlinear partial differential equations, 2012 年 05 月 30 日 ~ 2012 年 06 月 06 日, ブリュッセル (ベルギー)
- ⑮ 塩路直樹, 領域のトポロジーと楕円型方程式の解の多重性, 2011 年度日本数学会秋季総合分科会実函数論分科会特別講演, 2011 年 9 月 28 日 ~ 10 月 1 日, 信州大学
- ⑯ 渡辺宏太郎, 塩路直樹, 球面幾何-双曲幾何の半線形楕円型方程式の正值解の球対称性導出への応用について, 2011 年度日本数学会秋季総合分科会函数方程式論分科会, 2011 年 9 月 28 日 ~ 10 月 1 日, 信州大学
- ⑰ 塩路直樹, Two solutions for a Bahri-Coron problem in an annular domain with a thin hole, International Conference on Differ-

ential & Difference Equations and Applications, 2011年7月4日~7月8日, ポンタ・デルガダ (ポルトガル)

- ⑮ 塩路直樹, Brezis-Nirenberg 問題の解の多重性について, 熊本大学応用解析セミナー 2011年12月19日, 熊本大学
- ⑯ 塩路直樹, 漸近的線形な楕円型問題の解の多重存在について, 佐賀大学における微分方程式セミナー (微分方程式セミナー通算第33回), 2010年8月24日~8月25日, 佐賀大学
- ⑰ 塩路直樹, Multiple sign changing solutions for an asymptotically linear elliptic problems, RIMS 研究集会「変分問題の展開・幾何学的勾配流と臨界点理論の新潮流」, 2010年6月7日~6月9日, 京都大学
- ⑱ 塩路直樹, Existence of multiple sign-changing solutions for semilinear elliptic equations via the Lusternik-Schnirelmann category, 日本数学会関数方程式論分科会 2009年度微分方程式の総合的研究, 2009年12月18日~12月19日, 東京大学
- ⑲ 塩路直樹, Neumann 境界条件下における半線形楕円型方程式の符号変化解の多重存在について, 2009年度日本数学会秋季総合分科会 2009年9月24日~9月27日, 大阪大学
- ⑳ 塩路直樹, Existence of multiple sign-changing solutions for a singularly perturbed Neumann problem, Equadiff12, 2009年7月20日~7月24日, ブルノ (チェコ)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

塩路 直樹 (SHIOJI Naoki)

横浜国立大学・大学院工学研究院・教授

研究者番号：50215943

(2) 連携研究者

平野 載倫 (HIRANO Norimichi)

横浜国立大学・大学院環境情報研究院・教授

研究者番号：80134815

玉野 研一 (TAMANO Kenichi)

横浜国立大学・大学院工学研究院・教授

研究者番号：90171892

渡辺宏太郎 (WATANABE Kohtaro)

防衛大学校・電気情報学群・准教授

研究者番号：30546057