

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年5月29日現在

機関番号：13801

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2009～2011

課題番号：21540215

研究課題名（和文） 無限遠の幾何とラプラシアンの特クトル・散乱・逆問題

研究課題名（英文）

Geometry of ends, spectrum of Laplacian, scattering, and inverse problem

研究代表者

久村 裕憲（KUMURA HIRONORI）

静岡大学・理学部・数学科

研究者番号：30283336

研究成果の概要（和文）：

- (1) ノン・コンパクト・リーマン多様体のラプラス・ベルトラミ作用素の離散スペクトラムが無限個となるためのシャープな曲率条件を求めた.
- (2) 1つのエンドの無限遠での測度増大度と drift Laplacian の固有値の非存在性についてシャープな結果を得た.
- (3) 様々な測度増大度を持つエンド達を持つ完備リーマン多様体において、極限吸収原理が成立つことを証明した.
- (4) 平均曲率が十分小さいノン・コンパクト完備リーマン部分多様体のターゲットのシリンダー状の領域を脱出する具体的な数値を求めた.

研究成果の概要（英文）：

- (1) I obtained a sharp criterion of the curvature which shows infinitely many discrete spectrum of the Laplace-Beltrami operator.
- (2) I obtained a sharp result which clarifies the relation between the measure growth rate and the absence of embedded eigenvalues of drift Laplacians.
- (3) I proved that the limiting absorption principle holds on Riemannian manifolds having ends with various measure growth rates.
- (4) I provided the explicitly calculated radii of geodesic balls of a complete noncompact Riemannian submanifold which must exit from the cylindrically bounded domain U , in case its mean curvature is sufficiently small.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	1,500,000	450,000	1,950,000
2010年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2011年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総計	3,500,000	1,050,000	4,550,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：幾何学・大域解析学

キーワード：ラプラス作用素・スペクトラム・極限吸収原理・絶対連続性・平均曲率・極小部分多様体

1. 研究開始当初の背景

- (1) に関しては、シュレーディンガー方程式に関しては連携研究者の芥川さんとの共同研究でユークリッド空間と双曲空間に関する研究があった。その結果はノン・コンパクト・タイプの対称空間に対しては極めてシャープな bounds を与えるものであった。そこで、ポテンシャル項を除き、考える多様体を一般化（この場合に限っては‘あやふや’と言うべきだろう）したときにはどうなるのか？という素朴な問題が考えられる。それを考えたかった。
- (2) に関しては、私個人が、先に、埋め込まれた固有値の非存在を保証するシャープな曲率条件を既に求めていた。また、それがシャープであることを示す例となる多様体を構成していた。それを Laplacian を特別な場合として含む drift Laplacian に対し、測度増大度という‘言葉’だけで表現したかった。
- (3) に関しては、Ricci 曲率の下限の条件を課した私自信の結果が既にあり、その証明の‘解の一意性’の部分で上述の(2)の結果が改良されたのに伴い Ricci 曲率の下限の条件が不要となった訳である。
- (4) に関しては、連携研究者の加須栄さんの結果で、ターゲットがユークリッド空間のとき、シリンダー状の領域を脱出するという結果があった。その結果のターゲットの多様体を負曲率にしたり、warped product manifolds にしたりして一般化するのが目的であった。

2. 研究の目的

- (1) に関しては、誰も今までやったことがない結果なので歴史上誰かがこれをやらねばならないという思いがあって実行した。
- (2) に関しては「曲率でなく、測度増大度のみが重要である」ということがとても大

事で、それにより問題は純粋に解析学的となるばかりでなく、また、定理の適用範囲も飛躍的に増大するのでこれが drift Laplacian に対し非常に綺麗な形で示せたことは幸運と言える。

- (3) も同様に一気に定理の適用範囲が広がるだけでなく、私自身、驚いた結果である。
- (4) はターゲットの有界領域を出るだけでなく warped product 多様体のシリンダー状の領域を既に脱出しなければならないので、加須栄さん結果の一般化と、ターゲットが負曲率の場合を改良したいというのが単純な動機である。

3. 研究の方法

- (1) に関しては、芥川さんとの共同研究で得られた relative geometric Hardy's inequality を用い得られた結果がシャープなことを示し、また、所謂、transplantation method を芥川さんとの共同研究で得られた test functions を使い、離散固有値が無限であることを示めた。
- (2) と (3) に関しては一般の多様体上にはフーリエ変換が存在しないので、最も原始的な方法で問題をアタックせざるを得なく、先行きの見えない大変な計算 (hard analysis) をしなければならなかった。
- (4) に関しては、連携研究者の加須栄さんによる非常に先駆的な方法があったので、その方法を、より良い関数に適用し、また、warped product manifolds 上で成り立つ幾何学的等式を用いて結果を導出した。

4. 研究成果

得られた結果を以下、箇条書きで述べたい。

- (1) ノン・コンパクト完備リーマン多様体のラプラス・ベルトラミ作用素の

essential spectrum の下限がゼロでないとする。そのとき、その下限値未満に離散スペクトラムが有限個表れるか、それとも無限個か、という問題が考えられる。その離散スペクトルの無限性を保証するための Ricci 曲率の下限の無限遠でのシャープな挙動決定した。その式自体は、以下の論文の [2] を見られたい。また、その結果が実際にシャープであることを示すための例となる回転対称多様体を構成した。

- (2) ノン・コンパクト完備リーマン多様体上で drift Laplacian を考える。このとき、一つのエンド上の測度増大度が、無限遠で、距離関数の逆数よりも速く実定数 c に収束するとき、drift Laplacian は、 $c^2/4$ より大きい固有値を持たないことを示した。
- (3) 任意個、例えば、 k 個のエンド、 E_1, \dots, E_k を持つ完備リーマン多様体を考える。各エンド E_i における測度増大度が、無限遠方で、非負値 c_i に距離関数の逆数より速く収束するとき、極限吸収原理が成立することを示した。それにより、ラプラシアンの特値の絶対連続性が従う。これは、量子力学的に解釈すると、一定数以上のエネルギーを持った自由粒子は、時間がプラス無限大、または、マイナス無限大に行くとき、無限の彼方に飛び去ることを意味する。
- (4) warped product space N 内に等長的に immerse されたリーマン部分多様体 M は、その平均曲率が十分小さく M のリッチ曲率の下限が無限遠で極度にマイナス無限大に発散するようなことが無い限り N 内のシリンダー状の領域 U を exit することが知られているが、その確実に exit する M の距離球の半径を幾何学的な量により具体的に与えた。この結果は、現在、投稿中である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 4 件)

- [1] 久村裕憲, Perturbation of a warped product metric of an end and the growth property of solutions to eigenvalue equation, accepted for publication in Kyoto J. Math. (査読有)

- [2] 久村裕憲, The radial curvature of an end that makes eigenvalues vanish in the essential spectrum II, Bull. London Math. Soc. (査読有), (2011) 43, 985-1003.

- [3] 久村裕憲, The lower bound of the Ricci curvature which yields the infinite number of the discrete spectrum of the Laplacian, Annales de l'institut Fourier (査読有), 61 (2011), p. 1557-1572.

- [4] 久村裕憲, The radial curvature of an end that makes eigenvalues vanish in the essential spectrum I, Math. Ann. (査読有), **346** (2010), 795-828.

[学会発表] (計 4 件)

- (1) 発表者：久村裕憲
東北大学数学教室幾何セミナー ・ 数学棟208 ・ 2010年 10月12日(火)
15:00--16:30 ・ 題目：ノンコンパクト多様体上のシュレーディンガー作用素
- (2) 発表者：久村裕憲
日本数学会春季総合分科会 ・ 慶應義塾大学 ・ 2010年 3月25日(木) ・ 題目：Absence of eigenvalues and convergence of radial curvatures to zero.
- (3) 発表者：久村裕憲
日本数学会春季総合分科会 ・ 慶應義塾大学 ・ 2010年 3月25日(木) ・ 題目：Ricci 曲率と離散スペクトルの無限性 ・ 有限性
- (4) 発表者：久村裕憲

日本数学会春季総合分科会・東京大学・
2009年3月28日(土)・題目: On the
discrete spectrum of Schrödinger
operator on noncompact Riemannian
manifolds.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

久村 裕憲(KUMURA HIRONORI)
静岡大学・理学部・准教授
研究者番号: 30283336

(2) 研究分担者 (なし)

(3) 連携研究者

加須栄 篤(KASUE ATSUSHI)
金沢大学・理学部・教授
研究者番号: 40152657

芥川 一雄(AKUTAGAWA KAZUO)
東北大学・情報学部・教授
研究者番号: 80192920