

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成25年 5月 15日現在

機関番号：17102

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2009～2012

課題番号：21540220

課題名（和文）非線形分散型方程式の解のダイナミクス

研究課題名（英文）Dynamics of solutions for nonlinear dispersive equation

研究代表者 水町 徹（MIZUMACHI TETSU）

九州大学・大学院数理学研究院・准教授

研究者番号：60315827

研究成果の概要（和文）：長波長近似モデルの波の伝播の単調性を利用して、Fermi-Pasta-Ulam の格子モデルの長波長近似領域の多パルス解、浅水波モデルの1つである Benney-Luke 方程式の孤立波の安定性を証明した。さらに KP-II 方程式 line soliton 解に加えた摂動が Burgers 方程式の系によって記述されることを導き、line soliton 解の安定性を証明した。Tzvetkov との共同研究で、KP-II 方程式の line soliton 解の安定性が y 変数に関して周期的な境界条件の下では自明解の安定性と同値であることを Backlund 変換を用いて示し、line soliton 解の $L^2(\mathbb{R}_x \times \mathbb{T}_y)$ での安定性を証明した。Pelinovsky との共同研究で1次元3次の非線形シュレディンガー方程式の1-soliton の L^2 安定性も Backlund 変換を使って証明した。

研究成果の概要（英文）：I study stability of solitary waves for long wave models using their monotonicity property. I show that modulations of the line soliton for the KP-II equation can be described a system of the Burgers equation and prove the stability of line soliton solution. I also prove stability of multi solitary waves of the Fermi-Pasta-Ulam lattices in the KdV limit and solitary wave solutions of the Benney-Luke equation which is a kind of bidirectional models akin to the Boussinesq systems. In a joint work with Tzvetkov, we show that stability of line soliton solutions for the KP-II equation in $L^2(\mathbb{R}_x \times \mathbb{T}_y)$ is equivalent to the stability of the null solution by using the Miura transformation and obtain $L^2(\mathbb{R}_x \times \mathbb{T}_y)$ stability of line solitons. The idea was transferred to 1D cubic NLS in a joint work with Pelinovsky.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	900,000	270,000	1,170,000
2010年度	700,000	210,000	910,000
2011年度	800,000	240,000	1,040,000
2012年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
総計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：孤立波、安定性、非線形分散型方程式

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

1. 研究開始当初の背景

非線形シュレディンガー方程式(NLS)などの非線形分散型方程式の定常波解の存在は、70年代後半以降に変分原理を用いて証明された。特に **ground state** とよばれるエネルギーが最小の定常波解は微分方程式の解空間の中で重要な役割を占めると信じられており、**ground state** のリャプノフ安定性は関数空間におけるコンパクト性の議論が整備された'80年代に厳密な証明が与えられた。

'90年代になってから **ground state** に摂動を与えたとき、時間が経つと擾乱が消え元のパルスと同様の形状になるかという問題の研究が始められた。それらの研究では、スペクトル解析の方法が多く取り入れられており、パルス解を変分的に特徴づけることが難しい問題も扱うことができるが、パルス解の摂動部分の時刻無限大における挙動が線形方程式の解と同じ振る舞いをするような高次の非線形項を持つ問題に適用範囲が限られるという難点を持っている。

'01と'06の Martel-Merle の論文により長波長近似モデルの孤立波はリャプノフ安定であれば、**virial** 型等式(方程式の解の伝播評価)から漸近安定性が証明できることがわかってきた。さらに'09に出版された論文で私は変分法を使ってリャプノフ安定性を証明する代わりに重み付き空間における線形安定性を使って **Fermi-Pasta-Ulam** の格子モデルの孤立波解の安定性をエネルギー空間で証明した。

2. 研究の目的

非線形 **Dirac** 方程式の定常波解や水面波方程式(表面張力が弱い場合)の孤立波解は安定と信じられているものの、孤立波がその停留点となる保存量はその第2変分を計算すると正・負の方向が共に無限の自由度を持ち、エネルギー法が適用できないため、その安定性の証明は未解決である。

KdV 方程式は水深が浅く長波長の波が一方方向に進むことを仮定して導出した **Euler** 方程式の縮約モデルであるが、水面波の方程式と **KdV** 方程式の中間段階に位置する **Boussinesq** によって提唱された長波長近似モデル(**bidirectional model**)でも表面張力の弱い場合はエネルギー法では孤立波の安定性は証明できない。

本計画では **Fermi-Pasta-Ulam** の格子モデルの孤立波の安定性を証明した方法を用いて **bidirectional model** の孤立波の安定性を証明すること、およびスペクトル解析の方法を用いて **NLS** や非線形 **Dirac** 方程式の孤立

波解の安定性を研究することを目的とした。

3. 研究の方法

bidirectional model は **KdV** 方程式と違い、波が左右の両方向に移動する状況を記述する。特に水面波の運動のように表面張力が小さな場合には、その孤立波は保存則を用いて安定性を議論できないことが知られている。本研究計画では、まず最初のステップとして長波長近似領域では孤立波の進行速度が線形の波に比べて速いことを利用して重み付き空間における孤立波の強線形安定性を導き、次に解の孤立波に対する摂動部分を元の方程式をみたす微小な解と重み付き空間に属する孤立波の周りの摂動に分解してそれぞれの部分を **virial** 型等式と線形化作用素の強線形安定性を利用して評価した。

4. 研究成果

1) 前回の研究課題で、**Fermi-Pasta-Ulam** の格子モデルの1-パルス解が長波長近似領域において安定なことを証明したのに続き、多パルス解の安定性を証明した。重み付き空間で摂動部分を観察するとパルス間の相互作用をあらわす部分が時間とともに増大するのが難点であったが、波の伝播に関する単調性を利用して、**N**-パルス解の安定性は、その中から最大のパルスを取り除いた(**N-1**)-パルス解の安定性の問題に帰着することを示すことで難点を解消した。

2) **bidirectional model** の一つである **Benney-Luke** 方程式は表面張力が弱い場合には孤立波がハミルトニアンのもース指数が無限大の鞍点となるため、表面張力が強い場合と異なりエネルギー法で安定性を証明することが困難であった。**Quintero** と **Pego** との共同研究では、**Fermi-Pasta-Ulam** の格子方程式の研究で用いた方法を応用し孤立波の摂動を **Benney-Luke** 方程式の小さな解のように振る舞う部分と指数的に局在化された部分の二つの部分に分けて、前者には自明解の安定性、後者にはエネルギー評価と孤立波の重み付き空間における強線形安定性を適用することで孤立波解のエネルギー空間における安定性を証明した。

3) **KP-II** 方程式のハミルトニアン保存量のハミルトニアン主要部が逆符号の項をもつため、時間大域的な評価を調べるのにハミルトニアンは有用でない。**Tzvetkov** 氏との共同研究では、**KP-II** 方程式が y 変数に関して周期的な場合に、**Miura** 変換が **KP-II** 方程式

の line soliton 解の周りの解が自明解の周りの解との L^2 同相写像を与えることを証明し、自明解の安定性から line soliton 解の安定性を証明した。同様の結果を Pelinovsky との共同研究で 1 次元 3 次の非線形シュレディンガー方程式に対して証明した。

4) y 方向に周期性を仮定した場合と異なり、line soliton の局所的な摂動に対する安定性を考えると、line soliton 自身とその y 方向に一樣な摂動が $L^2(\mathbb{R}^2)$ に属さないため、その変調する様子は時刻 t と横方向の空間変数 y を変数とする line soliton の高さ と位相に関する偏微分方程式で記述される。本研究課題では line soliton 解の周りでの線形化作用素のスペクトルと連続スペクトルを決定し、原点の周りに現れる line soliton の変調に関連した連続スペクトルに KP-II 方程式を射影することで Burgers 方程式の系を導出し、その挙動を解析することで line soliton 解の重み付き空間での安定性を証明した。その結果、平面孤立波解の安定性は局在化した孤立波の安定性よりも弱い位相でしか正しくないことが分かった。

5) Pelinovsky と離散シュレディンガー方程式の孤立波の漸近安定性を研究した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 8 件)

- 1) T. Mizumachi, Asymptotic stability of N -solitons of the FPU lattices, Archive for Rational Mechanics and Analysis (査読有) 207 巻 2 号 2013 年, 393-457, (DOI)10.1007/s00205-012-0564-x.
- 2) T. Mizumachi and N. Tzvetkov, Stability of the line soliton of the KP-II equation under periodic transverse perturbations, Mathematische Annalen (査読有) 352 巻 3 号 2012 年, 659 頁-690 頁, (DOI)10.1007/s00208-011-0654-3.
- 3) Y. Martel, F. Merle and T. Mizumachi, Description of the inelastic collision of two solitary waves for the BBM equation, Archive for Rational Mechanics and Analysis (査読有) 196 巻 2 号 2010 年 517 頁-574 頁, (DOI) 10.1007/s00205-009-0244-7.
- 4) T. Mizumachi, Asymptotic stability of lattice solitons in the energy space, Communications in Mathematical Physics (査読有) 288 巻 1 号 2009 年 125 頁 -144 頁, (DOI)

10.1007/s00220-009-0768-6 .

[学会発表] (計 5 件)

- 1) 水町 徹, On stability of line solitons of KP-II, 微分方程式の総合的研究 (京都大学, 2012 年 12 月 16 日)
- 2) 水町 徹, Backlund Transformation and L^2 -stability of NLS Solitons, International Congress on Industrial and Applied Mathematics (Contributed Minisymposia Dispersive Equations in Mathematical Physics), バンクーバーコンベンションセンター (カナダ), 2011 年 7 月 20 日
- 3) 水町 徹, Stability of the Line Soliton of the KP-II Equation in $L^2(\mathbb{R}_x \times \mathbb{T}_y)$, SIAM Conference on Applications of Dynamical Systems, (Snowbird, 2011 年 5 月 22 日)
- 4) 水町 徹, Stability of co-propagating N -solitons of FPU lattices in the KdV limit" SIAM Conference on Analysis of Partial Differential Equations. (2009 年 12 月 9 日). アメリカ合衆国マイアミ

[図書] (計 0 件)

[産業財産権]

○出願状況 (計 0 件)

名称 :
発明者 :
権利者 :
種類 :
番号 :
出願年月日 :
国内外の別 :

○取得状況 (計 0 件)

名称 :
発明者 :
権利者 :
種類 :
番号 :
取得年月日 :
国内外の別 :

[その他]

<http://arxiv.org/abs/1303.3532>

に KP-II 方程式の line soliton 解の安定性に関する最新の成果を公開した。

6. 研究組織

(1) 研究代表者

水町 徹 (MIZUMACHI TETSU)
九州大学・大学院数理学研究院・准教授
研究者番号：60315827

(2) 研究分担者

()

研究者番号：

(3) 連携研究者

()

研究者番号：