科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２６ 年　 ５ 月 ３０ 日現在

機関番号： １７１０２
研究種目： 基盤研究(C)
研究期間： 2009～2013
課題番号： ２１５４０２２１

研究課題名（和文）微分方程式の力学系的研究における幾何学的および位相的方法の研究

研究課題名（英文）Studies of differential equations in dynamical systems view by means of geometric and topological methods

研究代表者
新居　俊作（Nii, Shunsaku）

九州大学・数理（科）学研究科（研究院）・准教授

研究者番号：５０２８２４２１

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,500,000円、（間接経費）　　1,050,000円

研究成果の概要（和文）：(1)微分方程式の力学系的研究、とりわけホモクリニック分岐やヘテロクリニック分岐及びそれが自然な形で現れる反応拡散方程式の進行波の分岐と安定性の問題等に対して、幾何学的な方法や位相的な方法を用いた研究を行った。特に Stability Index の無限次元化や無限次元マスロフ指数が対象となった。
(2)非退化条件を課してベクトル場の等の特異点の分類を行うスタンダードな分岐理論とは逆に、完全に退化した状況からシステムを眺めることによって分岐解析を行った。

研究成果の概要（英文）：(1)Differential equations were studied in dynamical systems view, especially, homoclinic and heteroclinic bifurcations and bifurcations and stability of traveling waves, in reaction diffusion equations in which those bifurcations naturally appear, were treated by means of geometric and topological methods. Infinite dimensional Stability Indices and infinite dimensional Maslov Indices were focused.
(2)Bifurcation analysis were carried in which the systems were assumed to be completely degenerate. Those were contrary to standard bifurcation theory in which the systems are assumed to be non-degenerate and singular points are classified.

研究分野： 数物系科学

科研費の分科・細目： 数学 大域解析学

キーワード： Stability Index　分岐　幾何学的方法　位相的方法

１．研究開始当初の背景

(1)力学系の理論では以前から構造安定性の視点からホモクリニック／ヘテロクリニック軌道の存在とその分岐について研究されて来た。また一次元反応拡散方程式や神経方程式の文脈ではホモクリクック軌道はパルス状の進行波ヘテロクリニック軌道はフロント波やバック波と呼ばれる進行波に対応し、その存在や分岐、そして進行波としての安定性は応用数学としての問題意識から研究されて来た。

この問題に対する手法は様々なものが開発されて来たが､その中でも特に Maslov Index の非自己共役作用素への拡張である進行波の線形化固有値問題に対する Stability Index の理論は、他の手法が解析的な側面を持つのに対し純粋に位相的な手法であり本研究の研究代表者もその理論的発展と応用の両面に渡って貢献して来た。

進行波がホモクリニック分岐やヘテロクリニック分岐を起こす場合にその分岐構造を特定することと共に分岐の結果生み出される新たな進行波の安定性を決定することは重要な問題である。本研究代表者以前の研究ではこのことは主に解析的な手法を用いて行われていた。それに対し研究代表者は分岐の幾何学的及び位相的な構造を解析することによりそれを行うことで成果を挙げて来た。

このような文脈では当初は一次元の問題、即ち常微分方程式の問題として研究されて来たテーマではあるが、高次元の反応拡散方程式等における問題を考えると自然に高次元系の問題、即ち偏微分方程式或は無限次元力学系の問題として定式化されることになる。特に研究代表者により行われた Stability Index の理論の高次元系への拡張は無限次元 Maslov Index の拡張となっており、Maslov Index が無限次元ラグランジュグラスマン多様体の基本群を基礎としているのに対し無限次元 Stability Index は無限次元複素グラスマン多様体の２次元ホモトピー群を用いて定義されている。

さて、このようにして問題は無限次元力学系の枠組で記述される様になったが、その解析自体は無限次元を扱う困難さの為にあまりなされていない状況であった。

(2)力学系のポピュラーな問題の一つに特異点周りの分岐理論がある。これは、特異点理論のアナロジーをベクトル場や(常/偏)微分方程式に対して行い特異点を分類しようというものである。

この問題に対するスタンダードなアプローチは以下の様にまとめられる：

① 力学系に対し最も強い非退化条件を仮定する。
② その非退化条件の下で力学系を摂動した時に起こる現象を特定する。
③ 一段階弱い非退化条件を仮定し同様の解析を行う。

これは特異点論の視点から見た場合自然なアプローチであるが、このようなアプローチに拘らなければならない特に大きな理由は無い。

これに対し、全く反対側からのアプローチというものも考えられる。即ち：

① 力学系に対し最も強い退化条件を仮定する(例えば非線形項が自明とする)。
② その退化条件の下で力学系を摂動した時に起こる現象を特定する。
③ 一段階弱い退化条件を仮定し同様の解析を行う。

これまでこのような視点から分岐問題を捉えることは行われてこなかったが、このような見方も特に不自然では無い。

２．研究の目的

(1)一次元反応拡散方程式の進行波の安定性の解析の為に開発された Stability Index は、その後有限区間で定義された楕円型作用素の混合境界値問題下での固有値問題や周期進行波に沿った線形化作用素の連続スペクトル問題を扱える形に拡張されたり、相空間の接空間上のベクトル場のホモクリニック／ヘテロクリニック分岐を扱ったりと、その対象を広げて来た。そして、様々な問題に応用されて成功をおさめて来た。

それに対し研究の背景で述べた様に、無限次元の Stability Index は特定の設定に対してその定義はなされたが、その適用範囲は限られていたままであり、また具体的な問題においての解析は十分に行われていないままであった。そこで本研究では、無限次元力学系への位相的なアプローチという方向から無限次元 Stability Index を捉え、有界領域における境界値問題や多重周期進行波に沿った線形化作用素のスペクトル問題、或はやはり相空間の無限次元接空間上で定義されたシステムのホモクリニック／ヘテロクリニック分岐問題等対象となる問題を広げてゆくことを目的とした。

(2)研究の背景で述べた様に、スタンダードな分岐解析は特異点に対し非退化条件を仮定して特異点の分類を行うものであり、逆に特異点に対して完全な退化条件を仮定してそこから分岐現象を解析するというアプローチは今まで取られてこなかった。

本研究では、このような通常とは真逆の立場から分岐現象を見た場合にどのように既存

の結果を解釈し、或は新たな現象を発見出来るかを明らかにするものである。

具体的には、例えば、サドルノード分岐、ピッチフォーク分岐、トランスクリティカル分岐等は二次や三次の非線形項が非退化であることを仮定してベクトル場を摂動した時に起こる現象として理解されているが、一方で非線形項が完全に退化した線形系もある意味で位相的に同じ構造を持っている。そこでこのような分岐現象を線形系の変形として理解出来ないかという問題意識が自然なものとなる。

本研究の目的は、このような視点を正当化するべく適切な問題設定と適切な解析手段を探ることであった。

３．研究の方法

(1) この研究の困難は,本質的に無限次元の対象を扱わなければならないことであり,空間一次元系の安易な拡張からは自明な結論しか得られないことであった.この困難は,最終的には考える作用素の空間を Fredholm 作用素の範囲に制限し, Fredholm Grassman 多様体を用いて Index を定義することで解決された。

この研究以前に知られていたこととして,方物型の微分差分方程式への同 Index の拡張では,「半無限次元」を扱うことになり,この場合は直接的な拡張が可能であった。この,直接の拡張から得られた Index と今回の本質的に無限次元の場合への拡張とが,「半無限次元」の範囲では同値な Index を与えることも示この無限次元拡張が正しい方向であることの証拠として重要であった。

(2)この研究の出発点になる特異点が完全な退化は標語的なものであり、有限次元ユークリッド空間上のベクトル場以外では必ずしも線形化を考えれば良いとは限らない。

線形化の一般化として対象になるのは、線形化のゼロ固有空間と同様に特異点が１パラメタ族として同時に存在する様な設定である。その様な１パラメタ族が存在する系を摂動するとサドルノード分岐、ピッチフォーク分岐、トランスクリティカル分岐等と同様分岐現象が観察されることが期待された。

具体的な対象として三重結節点をもつ曲率流方程式等では境界の形状がある定点を中心とした円である場合に上記の様な定常解の１パラメタ族を持つことが本研究の結果判明しこの状況から境界の形状を摂動するという方法に依ってスタンダードな分岐と同様な分岐が起こることが示された。

４．研究成果

(1)本研究の研究者により開発された無限次元の Stability Index の理論の具体的な応用の対象の候補となる、無限帯状領域で定義された反応拡散系の断面方向に非一様な進行波が見つかり、実際に適用できるかどうかの検討が進んだ。

Maslov Index の理論と精度保証付き数値計算を組み合わせることにより、周期的なポテンシャルをもったシュレーディンガー作用素に無限遠方で指数的に減少する摂動を与えた場合に、本質的スペクトルから離散固有値が飛び出す様子を、誤差評価付きで表示することに成功した。従来は大規模な数値計算を行って特定のパラメタに対する存在/非存在の議論が行われていただけであったものが、位相的な方法を使うことにより、小規模な数値計算で固有値の大域的な挙動が追跡できたという点でこの研究には大きな意味がある。

無限次元系のコンパクト性に関連する上記以外の研究結果として、素子数有限の蔵元モデルが、実は一般に無限次元系であることが分かり、それが有限次元性を保つ様な特別な場合が、一般の場合とどのように異なるかに関する考察を行い、一定の成果が得られた。

(2)無限次元力学系の局所分岐理論において、既に確立された手法が必ずしも有効ではない、或はその実行が容易ではないような問題の幾つかの具体例に対して、その問題の持つ幾何学的な特徴を用いて、具体的な分岐構造を、幾何学的な議論により明らかにした。
更にそのような具体例の解析を通じて、本研究の一つの目標である、系の幾何学的な構造に基づいた新しい分岐理論の構築へ向けての洞察を深めることができた。
この方向では上記以外にも、分岐構造の研究の中で超臨界分岐の亜臨界分岐化の問題が検討され、局所的な制御により平衡点の安定性を高めた場合には、必然的に超臨界分岐が亜臨界分岐に変化せざるを得ないことが明らかになった。

(3)本研究を通して、相転移現象の解析に対する幾何学的な手法の予想外の有効性が明らかになった。具体的には、以下のことが理解された:
物質の熱力学的な変数を変化させた時にどのようにしてマクロな相転移現象がミクロな相互作用の結 果として現れて来るのかを説明するのが平衡統計力学の一つのトピックになっており、数学的にはこの問題は、分子やスピンなどの相互作用を記述するポテンシャルを与えて、それに基づきエントロピーや磁化等の熱力学的な量を定めて、粒子数が無限大の極限におけるそれらの量の発散や不連続性を解析することとなる。相転移の問題はこれまで主に解析的な手法を用いて研究されてきたが、最近になってこの問題を幾何 学的な視点から捉え直す試みが始まっ

ている。そこでの議論では、与えられたポテンシャルに対する相空間内の等エネルギー曲面の幾何学的性質の「大きな」変 化が様々な熱力学的量の発散や不連続性の起源になっているのではないかと推測されている。
本研究では、この様な相転移に対する幾何学的な視点からのアプローチを研究し、傍証として、generic な最近接相互作用については、任意のシステムサイズに対しエネルギー関数がモース関数になることが明らかになった。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　　1 件）

〔学会発表〕（計　　7 件）

〔図書〕（計　　件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計　　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計　　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織
(1)研究代表者
新居俊作（NII，Shunsaku）
九州大学・大学院数理学研究科・准教授
研究者番号：５０２８２４２１

(2)研究分担者
(　　)

研究者番号：

(3)連携研究者
(　　)

研究者番号：