

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 24 年 5 月 18 日現在

機関番号：32601

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2009 ～ 2011

課題番号：21540224

研究課題名（和文） 相空間を通じてのパンルヴェ系およびガルニエ系の研究

研究課題名（英文） Studies on Painleve or Garnier systems by means of their phase spaces

研究代表者

高野 恭一（TAKANO KYOICHI）

青山学院大学・理工学部・教授

研究者番号：10011678

研究成果の概要（和文）：

この研究課題の目的は、パンルヴェ系やガルニエ系の基本的性質を、それぞれの系に付随する相空間を調べることによって、明らかにすることであった。2変数ガルニエ系は5の分割毎に定まっていて、近接関係にある分割から分割に対応して合流操作がある。我々の研究での大きな成果は、この合流操作が相空間のレベルまで持ち上がることを示したことである。さらに、このことを用いて退化ガルニエ系のパンルヴェ性を示すことを試みた。これについては、部分的結果は得たが、まだ完全な証明には成功していない。

研究成果の概要（英文）：

The purpose of this assignment is to clarify the fundamental properties of Painleve or Garnier systems by means of their phase spaces. Garnier systems of two independent variables are defined corresponding to partitions of 5, and there exists confluence process between any two systems for the partitions one of which is adjacent to the other. The most important result of our study is to lift up the confluence processes to the level of phase spaces for Garnier systems of two variables. We have tried to prove the Painleve property for the degenerate Garnier systems of two variables by using the above result, but complete proof has not yet been obtained.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2010年度	700,000	210,000	910,000
2011年度	700,000	210,000	910,000
年度			
年度			
総計	2,500,000	750,000	3,250,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：関数方程式の大域理論、関数論、パンルヴェ系、ガルニエ系、相空間、合流操作、パンルヴェ性

1. 研究開始当初の背景

リーマン球面（種数0のリーマン面）上に $n+3$ 個の確定特異点をもつ2階線形常微分方程式はモノドロミー保存変形を許し、変

形方程式は自由度 n 、時間変数 n 個のホロノミックな正準方程式系として表わされる。 $n=1$ の場合が第6パンルヴェ系と、 n が2以上の場合がガルニエ系と呼ばれる。 $n=1$ 、

2の場合には退化した系も木村弘信氏（東京大学）によって具体的に知られており（もとの2階線形方程式が不確定特異点もち、ストークス係数も保存されるという広義モノドロミー保存変形方程式）、それらも込めてパンルヴェ系あるいはガルニエ系と総称する。

相空間とは、初期値空間をファイバーとする時間変数上のファイバー空間のことで、パンルヴェ系に対して岡本和夫氏（東京大学）により初めて構成されたもので、解曲線全体をとらえる空間のことである。研究代表者と当時の共同研究者により、この岡本相空間の各ファイバーには自然な正準構造が入ること、各アフィン座標系上でハミルトン関数が多項式であること、この相空間上の正準方程式はパンルヴェ系に限ることなどが示された。また非退化ガルニエ系の相空間が木村弘信氏によって構成され、 $n=2$ の場合には退化したものも含めてその相空間が鈴木正樹氏（神戸大学）によって構成された。

パンルヴェ系の相空間に関してはその他にも重要な知見が得られている。最も基本的なパンルヴェ性の、パンルヴェ自身と福原満州雄氏（東京大学）による証明は、相空間の上で考えると著しく簡易化されたし、やはり岡本和夫氏の発見であるベックレント変換群と相空間を記述する座標変換とが直接結びついていることが判明した。

相空間に関しては、坂井秀隆氏（東京大学）の分類理論、稲葉・岩崎・齊藤諸氏（京都大学・九州大学・神戸大学）の理論もあり、後者の自然な帰結として非退化ガルニエ系のパンルヴェ性が得られたことは特筆すべきことであった。

特殊な非線形微分方程式において最も基本的な問題に、上でも述べたパンルヴェ性をもつかどうかという問題がある。これが解決されているものはパンルヴェ系と非退化ガルニエ系のみである。ここをどう突破するかということが、研究開始当初の研究代表者のまたその周辺の問題意識であった。

2. 研究の目的

研究目的は、ホロノミックな非線形微分方程式系に支配される、多変数の場合を含む特殊関数の研究を、各々の相空間を通じて行うことであった。とくに2変数退化ガルニエ系のパンルヴェ性、もう少し一般に非線形微分方程式のパンルヴェ性を示す一般的方法を開発することが、この研究の主たる目的であった。

また、2変数ガルニエ系の特殊関数論的研究も目的としていた。

具体的には次の目的を掲げていた：

- (1) 一般の n に対する、退化したものも含めた、相空間の構成

- (2) 合流操作の相空間のレベルへの持ち上げ
- (3) 相空間レベルの退化（合流）操作を用いた、パンルヴェ性が退化操作で保存されることの厳密な証明
- (4) 固定特異点における解曲線、解曲面の様相
- (5) 非線形モノドロミー、非線形ストークスデータの研究

3. 研究の方法

研究の方法は次のようであった。

- (1) 2変数ガルニエ系がパンルヴェ性をもつという予想の証明を目指して次のような計画をたてた。

- ① 木村弘信氏の退化操作を多項式ハミルトニアンレベルで正しく求める。木村氏の論文では退化の結果が重要であるので、途中経過は見えていないのであるが、我々の目的のためには、途中経過が極めて重要なのである。退化途中でもハミルトニアンが多項式であって欲しい。

- ② ①で求めた退化操作を鈴木正樹氏が構成した相空間のレベルにまで持ち上げることを考える。パンルヴェのとき研究代表者がやった方法を参考に、各アフィン座標系において、ハミルトニアンが多項式であることが望ましい。

- ③ ②が成功したら、退化する前の系がパンルヴェ性を持つことを前提に、退化後の系がパンルヴェ性をもつことを証明する一般的方法を求める。

- (2) ガルニエ系はパンルヴェ系と同様に相空間にその基本的性質が反映していると思われる。そのことの確認として相空間上の正則なハミルトン系がガルニエ系に限るかどうかを調べる。

- (3) 固定特異点の近傍での解の様相をパンルヴェ系やガルニエ系の座標で記述することを試みる。パンルヴェ系については、局所理論はかつて作ったので、相空間の記述を用いて、接続問題がどの程度解けるかが問題である。

4. 研究成果

3の研究方法に記した各項にそって成果を述べる。

- (1) ① 2変数ガルニエ系の退化操作を一つの例外を除いて求めることが出来た。大変複雑なものもあるが、退化途中でもハミルトニアンが多項式であることを確かめた。
- ② ①で得られた退化操作が鈴木氏の相空間にまで持ち上がることをおおむね確かめた。幾何的

には退化過程とは、2つの複素射影直線上の複素平面バンドルが衝突する過程である。退化過程において各アフィン座標系上のハミルトニアンが多項式であることも確かめた。この辺りは計算機の支援が必須であった。

- ③ ②の結果を用いる、退化過程においてパンルヴェ性が保たれるという予想の証明は、部分的な進展はあったが、まだ未完成である。
- (2) 2変数非退化ガルニエ系の相空間上の正則なハミルトニアンは、多項式と仮定するとガルニエ系であることを確かめた。ただしまだ単なる計算の域を出ていない。
- (3) 固定特異点の近傍における解の振る舞いについて、パンルヴェ系の場合に、かつて作った一般的局所理論が通用するアフィン座標系がいくつもあることを確認した。通用しない座標系はある意味で不安定多様体と思われるが、未確認である。

以上の他に、研究分担者によって、離散パンルヴェ系の特殊解の構造に関する結果や、パンルヴェ系から離散系を得る一般的方法が開発された。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 16 件)

- ① Mimura, S. Isojima, M. Murata, J. Satsuma, A. Ramani & B. Grammaticos, Do ultradiscrete systems with parity variables satisfy the singularity confinement criterion?, J. Math. Phys. 査読有, 53(2012), 023510-023523.
- ② 岩尾慎介, 増田哲, 二項係数と Sierpinski 三角形, 九州大学応用力学研究所研究集会報告、査読有、23AO-S7(2012), 1-6.
- ③ 村田実貴生, 超離散反応拡散系, 九州大学応用力学研究所研究集会報告、査読有、23AO-S7(2012), 7-12.
- ④ T. Masuda, Hypergeometric tau-functions of the q-Painleve system of E8(1), Ramanujan J., 査読有, 24-1(2011), 1-31
- ⑤ M. Hay, K. Kajiwara & T. Masuda, Bilinearization and special solutions to the discrete Schwarzian KdV equation, J. Math-for-Industry, 査読有, 3(2011) 53-62.
- ⑥ S. Isojima, T. Konno, N. Mimura, M. Murata & J. Satsuma, Ultradiscrete Painleve II equation and a special function

solution, J. Phys. A: Math. Theor., 査読有, 44(2011), 175201-175210.

- ⑦ M. Murata, Exact solutions with two parameters for an ultradiscrete Painleve equation of type A6(1), 査読有, SIGMA, 7(2011), 59-73.
- ⑧ M. Murata, Discretising systematically the Painleve equations, Phys. D, 査読有, 240(2011), 305-309.
- ⑨ 村田実貴生, 微分方程式の系統立った離散化, 九州大学応用力学研究所研究集会報告、査読無、22AO-S8(2011), 1-6.
- ⑩ 三村尚之, 磯島伸, 村田実貴生, 薩摩順吉, A. Ramani, B. Grammaticos, 超離散特異点閉じ込めテストと方程式の可積分性について、九州大学応用力学研究所研究集会報告、査読無、22AO-S8(2011), 23-29.
- ⑪ 増田哲, 離散冪関数の明示公式, 九州大学応用力学研究所研究集会報告、査読無、22AO-S8(2011), 56-61.
- ⑫ 磯島伸, 今野智之, 三村尚之, 村田実貴生, 薩摩順吉, 符号付き超離散パンルヴェ II 型方程式とその特殊解の系列について、九州大学応用力学研究所研究報告 査読無、22AO-S8(2011), 149-154.
- ⑬ M. Murata, J. Satsuma, A. Ramani & B. Grammaticos, How to discretize differential systems in a systematic way, J. Phys. A, 査読有, 43(2010), 315203-315217.
- ⑭ N. Mimura, M. Murata et al., Singularity confinement test for ultradiscrete equations with parity variables, J. Phys. A, 査読有, 42(2009), 315206-315212
- ⑮ 村田実貴生, q パンルヴェ方程式のラック形式, 京都大学数理解析研究所講究録、査読無、1662(2009), 73-87.
- ⑯ 増田哲, Painleve V 方程式の超幾何解と反自己双対 Yang-Mills 方程式, 京都大学数理解析研究所講究録、査読無、1650(2009), 59-74.

[学会発表] (計 29 件)

- ① 高野恭一, 合流過程におけるパンルヴェ性の保存について、超幾何方程式 2012, 2012 年 1 月 7 日、神戸大学滝川会館
- ② 村田実貴生, 超離散 Allen-Cahn 方程式、RDS セミナー、2011 年 12 月 5 日、明治大学先端数理科学インスティテュート
- ③ 村田実貴生, 超離散 Allen-Cahn 方程式、第 8 回「生物数学の理論とその応用」、2011 年 11 月 18 日、京都大学数理解析研究所
- ④ 村田実貴生, 超離散 Allen-Cahn 方程式、

- 広島数理解析セミナー、2011年11月11日、広島大学理学部
- ⑤ 岩尾慎介、増田哲、二項係数と Sierpinski 三角形、九大応力研究所研究集会、2011年10月27日、九州大学応用力学研究所
- ⑥ 村田実貴生、超離散反応拡散系、「非線形波動研究の進展—現象と数理の相互作用」、2011年10月27日、九州大学応用力学研究所
- ⑦ 村田実貴生、超離散 Allen-Cahn 方程式、九州可積分系セミナー、2011年10月6日、九州大学理学研究院
- ⑧ 村田実貴生、超離散 Allen-Cahn 方程式、日本数学会秋季総合分科会、2011年9月28日、信州大学
- ⑨ 増田哲、D型高階 q -Painleve 系について、函数方程式論サマーセミナー、2011年8月5日、休暇村 支笏湖
- ⑩ T. Masuda, An explicit formula for the discrete power function associated with circle patterns of Schramm type, Infinite Analysis II-Frontier of Integrability--, 2011. 7. 27, Tokyo Univ.
- ⑪ M. Murata, Ultradiscrete Allen-Cahn equation, Infinite Analysis II-Frontier of Integrability--, 2011. 7. 27, Tokyo Univ.
- ⑫ 増田哲、離散冪函数の明示公式、日本数学会年会、2011年3月23日、早稲田大学
- ⑬ 高野恭一、2変数 Garnier 系の相空間の合流、超幾何方程式 2011、2011年1月6日、神戸大学理学部
- ⑭ 増田哲、離散冪函数の明示公式、超幾何方程式 2011、2011年1月6日、神戸大学理学部
- ⑮ 高野恭一、Completeness of phase spaces, 日本・ブルガリア数学交流会、2010年11月23日、日本大学理工学部駿河台校舎
- ⑯ 増田哲、超離散冪函数の明示公式、九州可積分系セミナー、2010年11月12日、九州大学大学院数理学研究院
- ⑰ 磯島伸、今野智之、三村尚之、村田実貴生、薩摩順吉、符号付き超離散パンルヴェ II 型方程式とその特殊解の系列について、「非線形波動研究の新たな展開—現象とモデル化」、2010年10月30日、九州大学応用力学研究所
- ⑱ 増田哲、離散冪函数の明示公式、「非線形波動研究の新たな展開—現象とモデル化」、2010年10月29日、九州大学応用力学研究所
- ⑲ 三村尚之、磯島伸、村田実貴生、薩摩順吉、A. Ramani, B. Grammaticos, 超離散特異点閉じ込めテストと方程式の可積分性について、「非線形波動研究の新たな

- な展開—現象とモデル化」、2010年10月28日、九州大学応用力学研究所
- ⑳ 村田実貴生、微分方程式の系統だった離散化の方法、「非線形波動研究の新たな展開—現象とモデル化」、2010年10月28日、九州大学応用力学研究所
- ㉑ 村田実貴生、超離散パンルヴェ方程式の2パラメータ解、日本数学会秋季総合分科会、2010年9月24日、名古屋大学
- ㉒ 磯島伸、今野智之、三村尚之、村田実貴生、薩摩順吉、超離散パンルヴェ II 型方程式とその特殊解の系列について、日本応用数理学会年会、2010年9月7日、明治大学駿河台キャンパス
- ㉓ 三村尚之、磯島伸、村田実貴生、薩摩順吉、超離散特異点閉じ込めテストと可積分性について、日本応用数理学会年会、2010年9月7日、明治大学駿河台キャンパス
- ㉔ 増田哲、離散冪函数と Painleve VI 方程式の超幾何函数解、函数方程式論ワークショップ、2010年7月26日、東京大学大学院数理学研究科
- ㉕ 増田哲、Painleve 系の対称性と特殊解、デジタル解析学セミナー、2010年1月27日、早稲田大学基幹理工学部
- ㉖ T. Masuda, The anti-self-dual Yang-Mills equation and the third Painleve equation, China-Japan Joint Workshop, 2010-1-9, Shaoxing Yonghe Manor Resort Hotel, Shaoxing.
- ㉗ 増田哲、ASDYM 方程式と Ernst 方程式、ASDYM 方程式と Painleve III 方程式、「自己双対 Yang-Mills 方程式の数理と可積分構造」、2009年11月8日、名古屋大学大学院多元数理学研究科
- ㉘ 増田哲、梅村多項式の判別式について、函数方程式サマーセミナー、2009年8月2日、かんぼの宿鳥羽
- ㉙ T. Masuda, Discriminants of Umemura polynomials associated with PV, Workshop on Accessory Parameters, 2009. 6. 21, 東京大学玉原国際セミナーハウス

[図書] (計 1 件)

- ① コルモゴロフ (藤田宏監訳)、朝倉書店、19世紀の数学 III, 2009, 総 412 ページ (担当部分 95 ページ-- 234 ページ)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

高野 恭一 (TAKANO KYOICHI)
青山学院大学・理工学部・教授
研究者番号：10011678

(2) 研究分担者

増田 哲 (MASUDA TETSU)
青山学院大学・理工学部・准教授
研究者番号：00335457

村田 実貴生 (MURATA MIKIO)
青山学院大学・理工学部・助教
研究者番号：60447365