

機関番号：11501

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2009～2013

課題番号：21540228

研究課題名(和文)楕円量子群の自由場表現による頂点作用素・T-Q作用素の解析

研究課題名(英文)Free Field Approach to Elliptic Quantum Groups : Vertex Operator and T-Q Operator

研究代表者

小島 武夫 (Kojima, Takeo)

山形大学・理工学研究科・准教授

研究者番号：80307800

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,300,000円、(間接経費) 990,000円

研究成果の概要(和文)：本研究は大きく分けて、次の2つのテーマである。

(1) スピンチェインのハミルトニアンに対角化を開境界条件において行なった。対称性として、 $Uq(A_2^{\wedge}(2))$, $Uq(\widehat{\mathfrak{sl}}(M|N)^{\wedge})$, $Uq(\widehat{\mathfrak{sl}}_N^{\wedge})$ の場合を考察した。バセイルハックとの共同研究で、 $Uq(\mathfrak{sl}_2^{\wedge})$ で境界条件を三角行列に一般化し相関関数を導いた。(2) 量子超対称性 $Uq(\widehat{\mathfrak{sl}}(N|1)^{\wedge})$ の複素数レベル k における自由場表現を構成した。スクリーニング、頂点作用素の構成も併せ行なった。楕円量子群 $Uq(\widehat{\mathfrak{sl}}(M|N)^{\wedge})$ を導入し、楕円量子群 $Uq(\widehat{\mathfrak{sl}}(N|1)^{\wedge})$ のレベル k の自由場表現を得た。

研究成果の概要(英文)：We study the following 2 problems.

(1) We diagonalize the Hamiltonian of spin chains associated with quantum group $Uq(A_2(2))$, $Uq(\widehat{\mathfrak{sl}}(M|N))$, and elliptic quantum group $Uq(\widehat{\mathfrak{sl}}_N)$. We study XXZ chain with a triangular boundary ($Uq(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ symmetry), and derive integral representations of correlation functions (Joint work with P. Baseilhac). (2) We construct a free field realization of $Uq(\widehat{\mathfrak{sl}}(N|1))$ for an arbitrary level k (complex number). We constructed free field realizations of screenings and vertex operators. We introduce the elliptic super-algebra $Uq(\widehat{\mathfrak{sl}}(M|N))$, and give a free field realization of $Uq(\widehat{\mathfrak{sl}}(N|1))$ for an arbitrary level k .

研究分野：無限可積分系

科研費の分科・細目：大域解析学

キーワード：可積分系 相関関数 自由場表現 楕円量子群 スピンチェイン 開境界条件 積分表示 量子群

1. 研究開始当初の背景

自由場表現による可解模型の研究は、無限自由度の模型を直接考察することにより、自由場(微分作用素による無限次元表現)を直接活用できる。そのため、従来からの手法では困難であった、相関関数や形状因子の厳密解を導くことができる。このように自由場表現の方法による可解模型へのアプローチは、大変に強力な手法である。しかしながら、この方法の探究はまだ不十分な状態であった。そこで、量子群、楕円量子群の対称性を持つ模型を、自由場表現の方法で徹底的に研究することにした。

2. 研究の目的

楕円量子群 $U_{qp}(g)$ 、量子群 $U_q(g)$ を対称性を持つ可解模型を自由場表現の方法で考察する。より具体的には以下の(1)(2)を考察する。

(1) 量子群、楕円量子群の対称性のスピン鎖を、open boundary condition において考察し、相関関数の積分表示を導く。

(2) 量子群、楕円量子群および Vertex operator の自由場表現を一般の複素数レベル k において構成する。

3. 研究の方法

(1) 量子群 $U_q(g)$ 、楕円量子群 $U_{qp}(g)$ 対称性のスピン鎖の転送行列の対角化を考察する。Vertex operator の自由場表現を用いて、必要条件から Boundary vacuum state の自由場表現を構成し、十分性は帰納的に示す。

(2) 量子群 $U_q(g)$ 中の sl_2 構造のレベル k の自由場表現からスタートし、他の交換関係を満たすように自由場を順次付加していく。有限操作の後、閉じた自由場表現にたどり着く。さらに Dressing procedure により、楕円量子群 $U_{qp}(g)$ の自由場表現へと拡張する。

4. 研究成果

(1) 量子群および楕円量子群対称性のスピン鎖を Open boundary condition で考察した。

Izergin-Korepin 模型を考察。Boundary Yang-Baxter 方程式の3つの離散解すべてに対して Boundary vacuum state の自由場表現を構成した。(単位行列解の場合は Yang-Zhang による先行研究有。)

量子超対称性 $U_q(\widehat{sl}(M|N))$ のスピンを考察。Boundary vacuum state の自由場表現を構成。Vertex operator の自由場表現は単項ではないにも拘らず、Boundary vacuum state は単項になることが目新しい。(この論文では明確には触れなかったことであるが、ランクの低い $sl(2|1)$ の場合に Yang-Zhang らによる先行研究があったが、彼らの結果には誤りがあり、大幅な修正が必要である。)

楕円量子群 $U_{qp}(\widehat{sl}_N)$ 対称性の模型を考察。Boundary vacuum state の自由場表現を構成。Norm の無限積表示を導出した。 $p \rightarrow 0$ の極限である $U_q(\widehat{sl}_N)$ の場合は、Furutsu-Kojima, JMP (2000) の結果の再構成を与える。

XXZ chain with a boundary を Boundary Yang-Baxter 方程式の三角行列解による境界条件の下に考察し、相関関数の積分表示を導出した。特に1点相関数の場合に、積分の無い簡明な表示を導いた。模型の上半三角行列と下半三角行列との対応から、テータ関数の多重積分の間の Conjecture を導いた。(P.Baseilhac との共同研究)

(2) 量子群、楕円量子群の自由場表現を一般のレベル k (複素数) で構成した。

量子超対称性 $U_q(\widehat{sl}(N|1))$ の自由場表現を一般のレベル k で構成した。さらに、Screenings, Vertex operators の自由場表現も併せ構成した。この表現から臨本表現への射影を与えるグザイ・エータシステムの Conjecture も与えた。ランクの低い $N=2$ の場合は、Awata, Odake, Shiraishi, LMP(1997) の再構成を与える。

楕円超代数 $U_{qp}(\widehat{sl}(M|N))$ を、量子群からの Dressing procedure により導入した。の結果を活用して、 $U_{qp}(\widehat{sl}(N|1))$ の自由場表現を、一般のレベル k で構成した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計15件)

(1) T.Kojima : Vertex operator approach to semi-infinite spin chain : recent progress,

to appear in Proceedings for X-th International Workshop Lie Theory and its Application in Physics, (2015), accepted for publication, (査読有)(印刷中)

(2) T.Kojima: Bosonization of Superalgebra $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}(N|1))$ for an arbitrary level, to appear in Proceedings for the 7-th Mathematical Physics Meetings, (2014) (査読無)(印刷中).

(3) P.Baseilhac, T.Kojima: Correlation functions of the half-infinite XXZ spin chain with a triangular boundary, Nucl.Phys. B880, 378-413 ,(2014) (査読有)

(4) T.Kojima: Diagonalization of Transfer Matrix of Supersymmetry $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}(M+1|N+1))$ Chain with a Boundary, J.Math.Phys.54, 043507(40pages)(2013), doi:10.1063/1.4799933. (査読有)

(5) T.Kojima: Bosonization and Vertex Operator of Supersymmetry $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}(N|1))$ for Level k, J.Phys.A410:Conference Series,02062(4pp) (2013), doi:10.1088/1742-6596/410/1/12062. (査読有)

(6) T.Kojima: The Wakimoto Realization of the Superalgebras $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}(N|1))$ and $U_{\{q,p\}}(\widehat{\mathfrak{sl}}(N|1))$, Springer Proceedings 36 : Mathematics and Statistics, 263-276 (2013), doi:10.1007/978-4-431-54270-4. (査読有)

(7) T.Kojima: Screenings and Vertex Operators of Quantum Superalgebra $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}(N|1))$, J.Math.Phys.53, 083503(30pages) (2012), doi:10.1063/1.4742125. (査読有)

(8) T.Kojima:

Free Field Realization of Quantum Superalgebra $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}(N|1))$, J.Math.Phys. 53, 013515(15pp), (2012). (査読有)

(9) T.Kojima: Infinitely many commuting operators for the elliptic quantum group $U_{\{q,p\}}(\widehat{\mathfrak{sl}}_N)$, Proceedings of 6th Mathematical Physics Meeting, held in Belgrade, Serbia, 235-250, (2012) [ISBN:978-86-22441-30-4]. (査読無)

(10) T.Kojima: Elliptic Deformed Superalgebra $U_{\{q,p\}}(\widehat{\mathfrak{sl}}(M|N))$, J.Phys. A44: Math.Theor.485205 (23pp), (2011). (査読有)

(11) T.Kojima: A remark on ground state of boundary Izergin-Korepin model, Int.J.Mod.Phys.A26, 1973-1989, (2011). (査読有)

(12) T.Kojima: Free field approach to diagonalization of the boundary transfer matrix, J.Phys.A284:Conference Series,012041(10pp), (2011). (査読有)

(13) T.Kojima: Diagonalization of infinite transfer matrix of boundary $U_{\{q,p\}}(A_{N-1}^{\wedge(1)})$ Face model, J.Math.Phys.52,013501(26pp) (2011);doi:10.1063/1.3521604. (査読有)

(14) T.Kojima: Free field realization of commutative family of elliptic Feigin-Odesskii algebra, RIMS Kokyuroku,1700,11-32, (2010) .(査読無)

(15) T.Kojima: Wakimoto realization for the elliptic quantum group $U_{\{q,p\}}(\widehat{\mathfrak{sl}}_N)$ and its application to the integrals of motion, Int.J.Mod.Phys. A30, 5561-5578, (2009), (査読有).

[学会発表](計 21 件)

(1) T.Kojima : Vertex Operator Approach to Semi-Infinite Spin open chain, 京都大学情報学研究科セミナー、2013年8月30日、京都大学.

(2) T.Kojima : Vertex Operator Approach to Semi-Infinite Spin Open Chain : Recent Progress, X-th International Workshop Lie Theory and its Application in Physics, 2013年6月22日、ブルガリア科学アカデミー、ブルガリア .
(招待講演)

(3) T.Kojima: Vertex Operator Approach to Semi-Infinite Spin Open Chain :Recent Progress, XXI-st International Conference, Intergrable Systems and Quantum Symmetry, 2013年6月12日、プラハ工科大学、チェコ.

(4) T.Kojima: Bosonization of the Superalgebra $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}(N|1))$ and $U_{\{q,p\}}(\widehat{\mathfrak{sl}}(N|1))$ for an arbitrary Level, 7-th Mathematical Physics Meeting "Summer school and Conference of Modern Mathematical Physics"、2012年9月13日、ベオグラード大学、セルビア、
(招待講演) .

(5) T.Kojima: Bosonization and Vertex Operator of Supersymmetry $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}(N|1))$ for Level k , International Conference on Mathematical Modeling in Physical Sciences, 2012年9月5日、ブダペスト、ハンガリー.

(6) T.Kojima: Bosonization of the Superalgebra $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}(N|1))$ and $U_{\{q,p\}}(\widehat{\mathfrak{sl}}(N|1))$ for an arbitrary Level, 6-th World Congress of Nonlinear Analysts, 2012年6月27日、アテネ大学、ギリシャ.
(招待講演)

(7) T.Kojima:

Elliptic Algebra $U_{\{q,p\}}(g)$, 東北大学理学研究科数学専攻・表現論セミナー、2012年3月2日、仙台.

(8) T.Kojima:
量子超代数 $U_{\{q\}}(\widehat{\mathfrak{sl}}(N|1))$ のレベル k の自由場表現、日本数学会、2011年10月2日、信州大学.

(9) T.Kojima :
Elliptic Algebra $U_{\{q,p\}}(g)$: Recent advances and future project, Seminaire de Physique Theorique, 2011年9月22日、トゥール大学、フランス.
(招待講演)

(10) T.Kojima :
Elliptic Algebra $U_{\{q,p\}}(g)$: Recent advances for superalgebra $g=\widehat{\mathfrak{sl}}(M|N)$, 研究会「可積分系とその周辺」(伊達悦朗先生還暦祝)、2011年7月3日、大阪大学、
(招待講演) .

(11) T.Kojima :
Elliptic Algebra $U_{\{q,p\}}(g)$: Recent advances for superalgebra $g=\widehat{\mathfrak{sl}}(M|N)$, IX. International Workshop Lie Theory and its Application in Physics, 2011年6月25日、ブルガリア科学アカデミー、ブルガリア、(招待講演)

(12) T.Kojima : 楕円量子群 $U_{\{q,p\}}(\widehat{\mathfrak{sl}}_N)$ の脇本表現、日本数学会、2010年9月25日、名古屋大学.

(13) T.Kojima : Diagonalization of infinite transfer matrix of boundary $U_{\{q,p\}}(A_{N-1}^{\wedge(1)})$ face model, 6th Mathematical Physics Meeting "Summer school and Conference of Modern Mathematical Physics", 2010年9月21日、ベオグラード大学、セルビア.
(招待講演)

(14) T.Kojima :
Diagonalization of infinite transfer matrix of boundary $U_{\{q,p\}}(A_{N-1}^{\wedge(1)})$ face model,

The 28th International Conference
"Group Theoretical Method in Physics",
2010年7月26日、ノーザンブリア大学、
英国.

(15) T.Kojima :
Diagonalization of infinite transfer
matrix of boundary
 $U_{\{q,p\}}(A_{N-1}^{\{1\}})$ face model,
東北大学理学研究科数学専攻・表現論セミナー、
2010年7月16日、仙台.

(16) T.Kojima :
楕円変形 W 代数の可換保存則、
研究会「可換 Banach 環と種々の分野との
交流」、2010年6月27日、山形大学、
米沢。(招待講演)

(17) T.Kojima :
The integrals of motion for the deformed
 W -algebra $W_{\{q,t\}}(\hat{\mathfrak{gl}}_N)$, Symmetry
Plus Integrability 2010, 2010年6月1
1日、テキサス大学、米国。
(招待講演)

(18) T.Kojima : The integrals of motion for
the deformed W -algebra
 $W_{\{q,t\}}(\hat{\mathfrak{gl}}_N)$, RIMS 研究会「可積
分系数理とその応用」、2009年8月30
日、はこだて未来大学、北海道。
(招待講演)

(19) T.Kojima: Wakimoto realization
of $U_{\{q,p\}}(\hat{\mathfrak{sl}}_N)$ and its
application to integrals
of motion, International Workshop
"Nonlinear and Modern Mathematical
Physics", 2009年7月11日、中国科学院
(北京), 中華人民共和国。
(招待講演)

(20) T.Kojima : Wakimoto realization of
 $U_{\{q,p\}}(\hat{\mathfrak{sl}}_N)$ and its application
to integrals of motion,
International Conference
"Symmetry in Nonlinear Mathematical
Physics", 2009年6月26日、キエフ大
学、ウクライナ.

(21) T.Kojima :
The integrals of motion for the deformed
 W -algebra $W_{\{q,t\}}(\hat{\mathfrak{gl}}_N)$,
The 8-th International Workshop
"Lie Theory and its Application in

Physics", 2009年6月19日、ブルガリ
ア科学アカデミー、ブルガリア。
(招待講演)。

〔図書〕(計 0件)

〔産業財産権〕
出願状況(計 0件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

取得状況(計 0件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等
<http://kojima.yz.yamagata-u.ac.jp/kojima.html>

6. 研究組織
(1) 研究代表者 小島 武夫 (KOJIMA, Takeo)
山形大学・理工学研究科・准教授
研究者番号：80307800

(2) 研究分担者 ()
研究者番号：

(3) 連携研究者 ()
研究者番号：

()

研究者番号：