

様式 C - 19

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年6月4日現在

機関番号：34316

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2009～2011

課題番号：21540232

研究課題名(和文) 完全楕円積分を含む超越方程式に帰着される微分方程式と大域的解構造

研究課題名(英文) Differential equations reduced to transcendental equations including complete elliptic integrals and their global solution structure

研究代表者

四ツ谷 晶二 (YOTSUTANI SHOJI)

龍谷大学・理工学部・教授

研究者番号：60128361

研究成果の概要(和文): 古典的な楕円関数を用いて、微分方程式のすべての解の表示式を求め、それをもとに大域的分岐構造を凝縮した超越方程式を導き詳しく解析するという、全く独自の手法を深化させ適用範囲を広げることができた。特に、cross-diffusion 方程式については、1次元の場合に超越方程式の巧みな解析法を発見し解の全体構造の数学的証明が可能となった。さらにこの知見をもとに、解の安定性について高次元も含めて解決の端緒を得た。また、面積制約条件付平面弾性曲線の曲率の爆発現象を明らかにできこれにより解の全体像が完全に分かった。

研究成果の概要(英文): We have been developed the original method for differential equations. We obtain all exact solutions and derive transcendental equations equivalent to the global bifurcation structure of the given differential equations. We have developed this method and applied it various problems. Especially, as for a cross-diffusion equation in 1 dimensional case, we have discovered various devises to analyze transcendental equations, and obtained the method to show the global bifurcation structure. Furthermore, we have started to investigate the stability of stationary solutions including multidimensional case. We have also reveal the blowup phenomena of curvature for plane elastic closed curves and the global structure of all curves.

交付決定額

(金額単位:円)

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	1,300,000	390,000	1,690,000
2010年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2011年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：非線形境界値問題 完全楕円積分 楕円関数 超越方程式 反応拡散方程式 線形化固有値問題 Sturm-Liouville 理論 非局所

1. 研究開始当初の背景

従来、解の存在のための十分条件を求めるとか、局所的な解の分岐構造に対しては多くの研究がなされてきた。しかしながら、解の

大域的な分岐構造を完全に解明することは、一般的には、極めて困難な問題であり、ごく僅かの古典的な例が知られているだけであった。

数年前より我々は、現代的な微分方程式の手法だけでは取り扱いが困難であった、重要で典型的な微分方程式の解の表示公式と大域的分岐構造についての研究を開始し成果を挙げている。

我々の研究の特徴は、最先端の数式処理ソフトで試行錯誤を行い、古典的な楕円関数を用いた解の表示式を求め、さらにそれをもとに大域的分岐構造を凝縮した超越方程式を導き、それを詳しく解析するという、全く独自の手法を開発し発展させていることである。超越方程式は、完全楕円積分およびそれらの合成関数からなり、その解析に問題ごとに新たな工夫を必要とする。

同時にこの方法は、特異摂動問題のように方程式に含まれるパラメータが零に近づくときの分岐解の極限形状についても、従来の方法では全くとらえることのできない形状を精密にとらえることにも威力を発揮する。これは、超越方程式の解の極限形を調べることに対応する。

2. 研究の目的

我々独自の方法をさらに深化させ同時に適用範囲を広げていくことである。

3. 研究の方法

具体的には、以下の問題に焦点をあてて研究をすすめる。

- ・反応拡散方程式の研究において典型的かつ重要な非線形項に対する、線形化固有値問題の固有値・固有関数の具体的な表示式を求めること。さらに拡散係数が零に近づいたときの、固有値の漸近公式、固有関数の極限形状の表示式を得る。
- ・数理生態学にあらわれる cross-diffusion 方程式の極限方程式の定常解の大域的構造の完全解明。さらに、拡散係数が零に近づいたときの、線形化固有値問題の極限形状を求める。
- ・3種よりなる反応拡散方程式を、2種よりなる cross-diffusion 方程式で近似できることが知られている。そのことを用い、3種反応拡散方程式の構造を2種 cross-diffusion 方程式の大域的構造を用いて理解する。
- ・長さ・面積を与えた、平面閉弾性曲線の極限形状の解明を行う。
- ・非局所項をもつ Gierer-Meinhardt 系の大域的分岐構造と極限形状を解明する。

4. 研究成果

上記の研究目的・方法に於いて述べたことに対応させながら、得られた研究成果を説明していく。

- ・反応拡散方程式の線形化固有値問題の固有値・固有関数については、非線形項を

Allen-Cahn 型 $f(u)=u-u^3$ に選んだ場合を念頭において、 $f(u)=\sin u$ の場合と比較しながら研究をすすめた。意外なことに、Allen-Cahn 型の方が複雑な性質をもっていることが判明した。このことは、講演発表に挙げてある、ドイツや台湾の国際研究集会の中で報告してきた。さらに、双安定な非線形項にどれだけ共通したものなのかを詳しく調べて、近いうちに論文として発表の予定である。

- ・cross-diffusion 方程式については研究成果を2011年に華東師範大学 PDE センターで開催された国際会議 Workshop on Nonlinear Parabolic/Elliptic Equations with Emphasis on Mathematical Spatial Ecology において連続講演(90分×4回)を行った。1次元の場合に超越方程式の巧みな解析法を発見し解の全体構造の数学的証明が可能となったことを根本から解説したものである。この研究集会の前後に Wei-Ming Ni 教授(ミネソタ大学・華東師範大学)、Yuan Lou 教授(オハイオ州立大学)と共同研究を行い、高次元の場合も含めた定常解の安定性の問題に関する解決の端緒を得た。
- ・3種よりなる反応拡散方程式を、2種よりなる cross-diffusion 方程式で近似し、そのことを用い3種反応拡散方程式を理解することについては、cross-diffusion 方程式の構造がようやくわかってきたので、高次元の場合について考察をすすめている。問題の焦点が定まってきている状況で今後の問題として残った。
- ・長さ・面積を与えた、平面閉弾性曲線の極限形状については、爆発現象を完全に明らかにする方法を発見した。完全楕円積分の合成関数の極限值を正確に求めることができずにいたがその解決法を見つけることができたからである。さらに、従来、大域的解構造でおぼろげにしかわかっていなかった部分も、爆発現象の理解を利用して鮮明にわかるようになり、大域的解構造も完全にわかった。膨大な計算を必要とするので、計算を再チェックしながら論文を作成しているところである。この研究は分担者松本和一郎との共同研究によるものである。
- ・Gierer-Meinhardt 系については、生産項をもつ1次元 Gierer-Meinhardt 方程式系の定常解の大域的分岐構造を明らかにすることができることがわかった。これまで解析不可能と思われていたすべての解が楕円関数を用いて表示できること発見したからである。この結果は、2010年にドイツ・ドレスデンで開催された第8回AIMS国際会議において発表し、具体的な計算を書いたものを2011年に論文として発表し

た．これにより解の大域的構造が完全に分かる道筋ができたので，現在，構造を決定する超越方程式の解析をおこなっているところである．

なお，ここ数年間で発見した，非線形微分方程式の解の全体構造を解析する我々独自の方法の本質を，分野外の研究者や一般の方々にも分かってもらい利用いただけるように，2011年4月～2012年4月の全12回，数学雑誌「数学セミナー」にて「楕円関数と友達になろう 微分方程式の解の全体像を求めて」の連載を行った．

さらに，2012年度日本数学会において，分野を超えた研究の促進および大学院生のテーマ提供等のための企画特別講演として，ここ数年間で発見した解の全体構造を解析する新しい手法について講演を行った．特に，面積の制約条件の付き平面閉弾性閉曲線の変分問題と cross-diffusion 方程式を例にとって本質が直観的にわかるように講演した．講演ビデオと講演資料を公開している．

以下，森田善久・二宮広和の研究成果について簡単に述べる．

森田は質量保存を満たす反応拡散方程式の非定数定常解の安定性と分岐現象について詳しく調べた．

二宮は3種よりなる反応拡散方程式系を cross-diffusion 方程式で近似できることを明らかにしている．反応拡散近似を扱う際，反応極限集合が重要な役割を果たすことを指摘し，その次元が2次元のときにどのような極限になるかを調べた．

これは将来 cross-diffusion 方程式の定常解の構造・安定性の解明と密接な関連をもつことが期待される．

5．主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計9件)

H. Takaichi I. Takagi and S.Yotsutani: Global bifurcation structure on a shadow system with a source term - Representation of all solutions - , Discrete and Continuous Dynamical Systems Supplement, (2011), 1344-1350. 査読有

H. Murakawa and H. Ninomiya: Fast reaction limit of a three-component reaction-diffusion system, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 379 (2011), 150-170. 査読有

M. Iida, R. Lui, and H. Ninomiya: Stacked Fronts for Cooperative Systems with Equal Diffusion Coefficients, SIAM J. Math. Anal. 43 (2011), 1369-1389. 査読有
T. Wakasa and S. Yotsutani: Asymptotic

profiles of eigenfunctions for some 1- dimensional linearized eigenvalue problems Communication on Pure and Applied Analysis, 9 (2010), 539 - 56. 査読有

Y. Morita and H. Ninomiya: Traveling wave solutions and entire solutions to reaction-diffusion equations, Sugaku Expositions 23 (2010), 213 - 233. 査読有

Y. Morita and T. Ogawa: Stability and bifurcation of nonconstant solutions to a reaction-diffusion system with conservation of a mass, Nonlinearity, 23(2010), 1387 - 1411. 査読有.

J.-S. Guo, H. Ninomiya and J.-C. Tsai: Existence and uniqueness of stabilized propagating wave segments in wave front interaction model, Physica D: Nonlinear Phenomena, 239(2010), 230 - 239. 査読有

W. Matsumoto, M. Murai and S. Yotsutani: One can hear the shape of some non-convex drums, More Progress in Analysis, Proc. 5th ISAAC Congress, 2009, World Sci. Pub., 863-872. 査読有

Y. Morita and K. Tachibana: An entire solution to the Lotka-Volterra competition diffusion equations, 40 (2009), 2217 - 2240, 査読有.

[学会発表](計20件)

四ツ谷 晶二:微分方程式の解の極限形状と大域的分岐構造 弾性曲線・交差拡散方程式系を例として ,2012年度日本数学会年会,企画特別講演,2012年3月26日～29日,東京理科大学.

村井・松本・四ツ谷:面積制約停留の平面閉弾性閉曲線の全体像と爆発現象, 2012年度日本数学会年会,函数方程式分科会,2012年3月26日～29日,東京理科大学.

Shoji Yotsutani: Blow up phenomena for plane closed elastic curves and global structure, 2012年1月23日～25日,九州大学西新プラザ.

Shoji Yotsutani: Blow up phenomena for plane closed elastic curves, The 20th Workshop on Differential Equations and Its Applications, Jan.6-8, 2012, Tamkang University, Taiwan.

村井・松本・四ツ谷:平面弾性閉曲線における曲率の爆発現象,2011年度日本数学会秋季総合分科会,函数方程式分科会,2011年9月28日～10月1日,信州大学.

Shoji Yotsutani: A limiting system in the Lotka-Volterra competition with cross-diffusion, The workshop is in

mathematical ecology, (90min. × 4) May 31-June 4, 2011, East China Normal University, China.

三好・村井・松本・四ツ谷：回転数 1 の平面弾性閉曲線における曲率の爆発現象，2011 年度日本数学会年会，函数方程式分科会，アブストラクト，早稲田大学，2011 年 3 月。(アブストラクト受理で講演とみなす.)

Shoji Yotsutani: Lotka-Volterra competition with cross-diffusion, The 19th Workshop on Differential Equations and Its Applications, Jan. 14-19, 2011, National Cheng Kung University, Taiwan.

Shoji Yotsutani: Blow up phenomena in closed plane elastic curves, Nonlinear Analysis and Integrable Systems, Tomoikiso, Nov. 18-19, 2010, Ryukoku Univ., Japan.

Shoji Yotsutani: Multiplicity of solutions to a limiting system in the Lotka-Volterra competition with cross-diffusion, Nov. 15-17, 2010, RIMS, Kyoto Univ. Japan.

三好・村井・松本・四ツ谷：平面弾性閉曲線における曲率の爆発現象，2010 年度日本数学会秋季総合分科会，函数方程式分科会，2010 年 9 月 21 日～23 日。名古屋大学，

S. Yotsutani: On a shadow system to the Gierer-Meinhardt system with a non-local term, 8-th AIMS conference on Dynamical systems, Differential equations and Applications, Special Session 31, May 25-28, 2010, Dresden Univ. of Tech., Dresden, Germany.

村井・松本・四ツ谷：完全楕円積分の商の評価式とその応用，日本数学会・2010 年度年会，2010 年 3 月 24 日，慶応大学理工学部。

四ツ谷晶二：定常解の大域的分岐構造解析と完全楕円積分の高精度近似，研究集会「HMA セミナー・冬の研究会 2010」，広島大学総合科学部，2010 年 1 月 8 日。

四ツ谷晶二：Cahn-Hilliard 方程式の定常解の大域的分岐構造と関連する話題，研究集会「偏微分方程式と現象：PDEs and Phenomena in Miyazaki 2009」，宮崎大学工学部，2009 年 11 月 21 日。

四ツ谷晶二：Cahn-Hilliard 方程式の定常解の大域的分岐構造と関連する話題，研究集会「夏の偏微分方程式セミナー 2009」，龍谷大学ともいき荘 2009 年 8 月 28 日。

四ツ谷晶二：数式処理の微分方程式研究への応用，RIMS 研究集会「数式処理と教育」，京大会館，2009 年 8 月 26 日。

S. Yotsutani: Asymptotic profiles of eigenfunctions for some 1-dimensional linearized eigenvalue problems, The Second International Conference on Reaction-Diffusion Systems and Viscosity Solutions, July 15, 2009, Providence University, Taiwan.

四ツ谷晶二：面積を規定した 2 次元弾性曲線の全体像第 2 回 RDS セミナー，明治大学生田キャンパス 2009 年 5 月 19 日。

四ツ谷晶二：面積制約条件付の閉平面弾性曲線と関連する話題 RIMS 研究集会「保存則と幾何学的偏微分方程式とその応用」，京大会館，2009 年 6 月 10 日。

〔図書〕(計 2 件)

郡 宏・森田善久：「生物リズムと力学系」共立出版，2011，192 頁。

神保秀一・森田善久：岩波数学叢書「ギンツブルク-ランダウ方程式と安定性解析」，岩波書店，2009。326 頁

〔その他〕

ホームページ等

<http://www.ryukoku.ac.jp/who/detail/592188/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

四ツ谷 晶二 (YOTSUTANI SHOJI)

龍谷大学・理工学部・教授

研究者番号：60128361

(2) 研究分担者

森田 善久 (MORITA YOSHIHISA)

龍谷大学・理工学部・教授

研究者番号：10192783

松本 和一郎 (MATSUMOTO WAICHIRO)

龍谷大学・理工学部・教授

研究者番号：40093314

二宮 広和 (NINOMIYA HIROKAZU)

明治大学・理工学部・教授

研究者番号：90251610

(3) 連携研究者 ()

研究者番号：