

## 様式 C-19

# 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 24 年 5 月 18 日現在

機関番号：11301

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2009～2011

課題番号：21540377

研究課題名（和文） 大変形する二次元粘弾性系の亀裂ダイナミクス

研究課題名（英文） Crack propagation in largely deformed viscoelastic films

研究代表者

早川 美德 (HAYAKAWA YOSHINORI)

東北大学・教育情報基盤センター・教授

研究者番号：20218556

研究成果の概要（和文）：大変形したゴム膜と粘性流体層との複合的な系を構成し、そこで見られる音速に較べて十分に遅い破壊現象を解析した。この系では、歪みの量によって、蛇行する亀裂と直進する亀裂のパターンの転移が存在することを見いだした。こうした亀裂の不安定性は、従来の線形破壊力学では説明できない現象であって、その起源が、大変形に伴う非線形弾性にあることを、実験と数理モデルのシミュレーションの両面から理由付けた。

研究成果の概要（英文）：We designed an experimental system of the crack of thin rubber films coupled with viscous fluid layer to realize slow fracture compared to sound propagation. We found a transition in the crack dynamics exhibiting oscillatory to straight patterns. Based on numerical simulations as well as experiments, we concluded that such oscillating patterns can not be explained within the framework of the conventional linear fracture mechanics and nonlinear elasticity due to largely deformation of rubber films is the essential factor.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	1,300,000	390,000	1,690,000
2010年度	800,000	240,000	1,040,000
2011年度	1,000,000	300,000	1,300,000
総計	3,100,000	930,000	4,030,000

研究分野：数理解物理・物性基礎

科研費の分科・細目：非平衡・非線形物理学

キーワード：破壊

### 1. 研究開始当初の背景

空気を入れて膨らませたゴム風船を針でつつくと、音をたてて風船は一瞬に破裂する。このようにして割った風船の破片を調べると、割れ目は（条件にも依るが）数 cm 程度の周期で蛇行してことが判る。こうした亀裂の進行は本来不安定な現象であって、その進行速度は弾性体（ゴムの膜）の表面弾性波程度に達するため、ありふれた現象とはいえ、

その「蛇行」の様子を定量的に解析するのは容易ではなく、理論的な理解も進んでいなかった。

ここで、硬くて表面が滑らかな物体（球や円柱状）の表面に、高粘度の流体を薄く塗布し、その上に薄いゴム膜（風船）を被せた状態で、一箇所にキズを付けて割ったらどうなるであろうか。ゴムの薄膜の運動は、粘性流体の層が介在することによって減衰項が支配的となり、弾性的な挙動を支配する方程式

が、双曲型（波動方程式）から楕円ないし放物型（拡散方程式）へとクロスオーバーするはずである。

そこで試みに、円筒状の物体に高粘性のシリコンオイルを薄く均等に塗布し、円筒状のゴム膜を張力が加えられた状態でそれに被せ、初期亀裂を入れて「割る」という予備実験を行った。その結果、亀裂は毎秒 **cm** 程度の速度で、波状（振動的）に進展することが確認された。

もし引っ張り応力が最大となる方向に亀裂が進展するならば、亀裂は常に円柱の長軸方向に直進すべきであるから、この結果は亀裂発展がある種の非線形効果を伴った複雑な自己組織現象であることを示唆している。

物体の内部あるいは表面で亀裂はどのような条件で進展しどのようなパターンを生じるのか。これは、物体の強度を論じる上で工学的に極めて重要な問題であることはもちろん、数理解理的なパターン形成の問題としても興味ある対象である。

近年では、物理的な視点で「割れ目」を論じた平田森三の先駆的な研究を発展させ、ガラスの熱応力による準静的破壊で生じる多様なパターンについて調べた Yuse と Sano (Nature 362 (1993))らの実験を契機として、準静的脆性破壊における亀裂の進展条件、振動亀裂の発生条件とその波長選択については、定量的にも実験とよい一致が得られるような計算機モデルと理論が報告されている。申請者は、早い時期からこの問題の数値シミュレーションに取り組んでいる (Y. Hayakawa, Phys. Rev. E 49 (1994), Phys. Rev. E. 50 (1994))。

ただし、こうした研究のほとんどは、線形弾性と理想的な脆性を持つ物体を対象とし、応力拡大係数と呼ばれる亀裂先端の弾性エネルギー密度を反映した量と、亀裂先端部分の応力場の対称性を仮定して議論が組み立てられている。そのため、物体が大変形し、亀裂の経路が大きく湾曲したり、分岐したりするような状況を記述するフレームワークを見いだすことがこの分野における重要な研究課題である。

## 2. 研究の目的

冒頭で述べた実験は、極めて単純ではあるが、二次元の弾性薄膜を、薄い流体（あるいは粘弾性体）の運動と密に結合させることによって

(1) 亀裂の進展速度を制御し、高速破壊から準静的破壊までの破壊の様態を同じ物質によって調べることができる。

(2) 各種のフィルム状の物質を用いることで、線形領域から非線形（大変形）領域に至

る広い変形領域をカバーできる。

(3) 流体層の物性（レオロジー）を選択することによって、亀裂先端部分の非線形領域ないし塑性域の大きさなど、通常の実験では制御しにくい性質を等価的に調整し、ひいては、亀裂先端の特異性を変えることができる。といった他にない特徴を持つ。

以上を踏まえ、本研究では、以下の目的を設定した：

(1) 薄膜に加える歪みの大きさや、流体層の性質等を系統的に変え、亀裂の運動と生じるパターンを時空間的にサンプリング、亀裂先端の形状、亀裂の経路を記録し、パターンと運動の相図を作成すること。

(2) 亀裂パターンのみならず、実験で得られると予想される振動や分岐などの時間発展を定量的に再現することができるコンピュータモデルの構築を通じて、大変形領域においても妥当な亀裂の発展規則（亀裂の運動方程式等）を提案すること。

(3) 実験試料を適切に選択することによって、準静的な破壊から高速破壊のクロスオーバー領域までをサーチし、破壊現象において新規の時間・空間ダイナミクスを見いだすこと。

## 3. 研究の方法

実験の実施と、それに対応した数理モデルの構成・解析の両面からアプローチをはかった。

### (1) ゴム膜の破壊実験とデータ解析

滑らかな表面を持つ長い円筒に、高粘性のシリコンオイルを塗布し、さらに円筒状のゴム膜（天然ゴムが素材の曲技用のゴム風船 (Qualatex 260Q, Pioneer Balloon Company 製) を主に使用) を被せる。さまざまな径の円筒を用いることでゴム膜に加わる歪みの

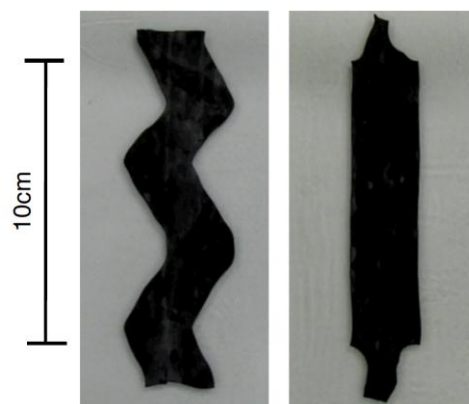


図1 典型的な亀裂パターン。左：振動パターン。右：直進パターン。実験終了後の試料を展開したもの。亀裂は下から上方向に進展。

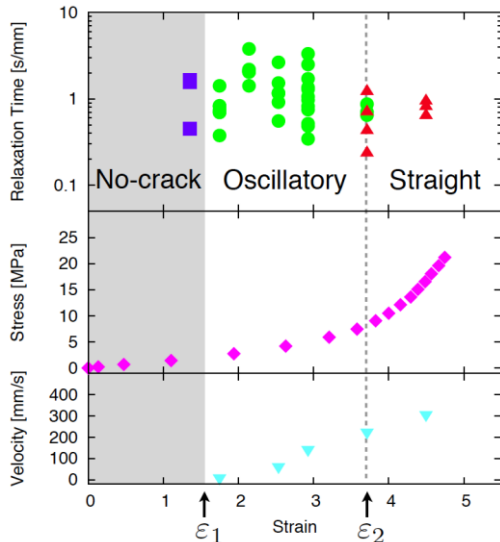


図2：パターンの形態のダイアグラム(上)、応力歪み特性(中)、および、亀裂先端の進展速度。

程度を、また、シリコンオイルの量や種類によって粘性力の程度を、それぞれ調整することができる。

ゴム膜を円筒に装着した状態では、円筒の軸方向にも歪みが加わった状態であるため、ゴム自身の持つ弾性によって、軸方向に長さが緩和し、やがて釣り合いの状態が達成される。その状態では、ゴム膜には周方向の歪みのみが加わっている。流体層の厚さを直接測定することは困難であるものの、この緩和過程を計測することによって、この系に作用する粘性の程度を推定することができる。すなわち、ゴム膜の緩和時間を $\tau$ 、試料の軸方向の長さを $L_j$ とすると、 $\tau/L_j$ をこの実験系の(間接的な)制御パラメータと見なすことができる。

加えて、円筒と周長と、ゴム円筒の自然な周長との比率、すなわち初期歪みの量が、もう一つの制御パラメータとなる。

これらを幾通りも変えながら、試料の端に初期亀裂を入れ、ゴム膜が裂ける様子を記録する。その結果、①初期歪みが臨界的な値 $e_1$ を越えるまでは、初期亀裂は進展しない。② $e_1$ を越える歪みを与えると、亀裂は振動しながら進展する。亀裂の振動パターン(形状や振幅)は、粘性の程度によっても変化する。③さらに歪みが増して、 $e_2$ を越えると、直線的な亀裂へのパターンが転移する(図1および図2を参照)、ことが明らかとなった。

一般にゴムの弾性は非線形性が顕著に現れるが、実験で用いた試料の応力歪み曲線(図2)を見ると、大変形領域で、曲線の勾配が大きく変化する辺りで、振動から直進へのパターンの転移が生じているように見える。また、亀裂の進展条件、パターンの転移は、専ら初期歪みの大きさのみに依存している。

このとき、 $e_1$ 以下ではゼロであった亀裂の進展速度は、 $e_1$ を越えると徐々に増加するが、この実験条件下では、高々1m/s程度であって、「自由な」ゴム膜の音速(30m/s程度)に較べ十分に遅い。その意味で、この系は、慣性力に較べ粘性力が支配的な、遅い破壊の条件を満たしている。

## (2) 数理モデル化とシミュレーション方法

以上の実験結果を踏まえ、この系を理想化した数理モデルを構成する。ゴム等の高分子素材の粘弾性特性は一般に複雑で、特に、大変形下では、非線形的な弾性や塑性が顕著に表れることがよく知られている。ここでは、弾性的な振る舞いを再現するために、neo-Hookeanモデルを採用し、有限要素法によって弾性膜を表現した。

neo-Hookeanモデルの弾性エネルギー密度は、各有限要素 $i$ の主軸方向の伸張率を $I_i$ としたとき、

$$F_i = \frac{m}{2} \left( I_{1,i}^2 + I_{2,i}^2 + \frac{1}{I_{1,i} I_{2,i}} - 3 \right) S_{0,i}$$

で与える。ここで $m$ は弾性係数を与えるパラメータ、 $S_{0,i}$ は要素の面積である。また、以下では、非線形弾性の効果を対照的に調べるために、線形弾性モデルによる解析も合わせて行った。

加えて、粘性流体層からの摩擦の効果を考慮するため、各面積要素 $dS_i$ 毎に、次式で定義される散逸関数

$$G_i = \frac{g}{2} \int \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 dS_i$$

を各要素ごとに計算し( $x$ は要素内の座標、 $g$ は散逸率)、これらから、各要素の頂点の座標 $q_i$ と速度 $\dot{q}_i$ を含む運動方程式

$$\frac{\partial}{\partial q_j} \left( \sum_i F_i \right) + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left( \sum_i G_i \right) = 0$$

を与え、反復法によって解いた。

実験と同様の境界条件(円筒の軸方向には自由境界、周方向には周期境界)を課して、時間ステップ毎の各要素の弾性エネルギー密度を計算し、それが、あらかじめ設定したエネルギー密度を超えた場合に、その要素を不可逆的に取り除くことで、亀裂の生成を表現する。その際に、計算ステップ毎に「破壊」される要素が最大でも1つに留まるように、時間ステップのサイズを調整した。

## 4. 研究成果

シミュレーションモデルによっても、初期歪みの増加に応じて、亀裂なし、振動亀裂、直進亀裂、というパターンの転移が再現された。また、弾性応答のみを線形にしたモデルでは、初期歪みの大きさに依らず、直進亀裂

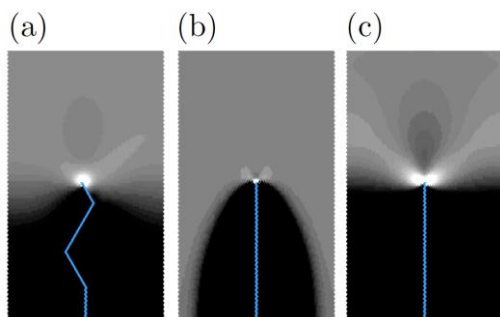


図3 シミュレーションで得られた亀裂パターンと弾性エネルギーの空間分布。(a) 非線形弾性 (Neo-Hookean) モデルで、初期歪みが小さい場合。(b) 非線形弾性モデルで、初期歪みが大きい場合。(c) 線形弾性モデルの場合。

しか現れなかった (図3)。

ゴム膜の高速破壊現象の先行研究においても、亀裂パターンの転移 (直進亀裂と振動亀裂) が報告されているが、振動亀裂が生じるためには、二つの軸方向 (引っ張り方向に加え、亀裂の進行方向) に初期歪みを与える必要がある。一方、本研究のように純粋な一軸伸張 (亀裂の進行方向には初期歪みが加わっていない) の条件で蛇行する亀裂パターンが生じるという実験報告はこれまでになく、亀裂の新しい不安定性の様態であると言える。そして、実験とシミュレーション結果から、こうした亀裂の振動に非線形弾性が本質的に関わっていることは明らかである。

亀裂の進展が十分に遅い (準静的な) 場合、線形弾性モデルにおいては、マクロな長さのスケールは、境界条件 (試料の幅など) によって規定される。一方、非線形弾性が顕著な場合には、系がそれ自身で、新たな長さのスケールを調整する自由度が生じる。振動亀裂が生じる条件で、亀裂先端部の弾性エネルギーが集中する領域をシミュレーションで調べると (図3 (a) の白色の領域)、振動の空間周期や振幅と、歪みが集中する領域のサイズには強い相関 (比例関係) があることが確かめられた。このことから、亀裂の振動が弾性場の非線形性に本来的に由来するものであると結論できる。

現状の数理モデルは、粘性流体による摩擦の効果は表現されているものの、ゴム膜の塑性等は考慮していない (ゴムの内部摩擦については実装している)。そのため、モデル自身は本質的に特徴的な時間スケールを持たず、実験では緩和時間 ( $\tau$ ) に相当するパラメータを表現することはできない。一方、実験においては、同じ初期歪み条件であっても、緩和時間パラメータの大きさによって、出現する振動パターンの形が異なるため、試料の内部ダイナミクスまでを考慮した数理モデルへと発展させることが、研究目的の (3) の達成とも関係し、今後の課題である。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕 (計 1 件)

① Oscillatory Instability in Slow Crack Propagation in Rubber under Large Deformation, D. Endo, K. Sato, and Y. Hayakawa (to appear in Physical Review E).

〔学会発表〕 (計 6 件)

① 大変形する薄膜中の亀裂進展パターン, 遠藤大樹, 早川美徳 (日本物理学会秋季大会, 熊本大学, 2009年9月) .

② Crack propagation in largely deformed rubber sheet”, D. Endo (The 2nd International GCOE symposium on “Weaving Science Web beyond Particle-Matter Hierarchy”, Tohoku University, February 2010).

③ 散逸系での薄膜中の亀裂進展パターン, 遠藤大樹, 佐藤勝彦, 早川美徳 (日本物理学会秋季大会, 大阪府立大学, 2010年9月) . 大変形したゴム薄膜中に生じる亀裂進展パターン, 遠藤大樹 (電子情報通信学会非線形問題研究会, 東北大学, 2010年11月) .

④ Crack patterns in nonlinear elastic films, D. Endo (The 3rd International GCOE symposium on “Weaving Science Web beyond Particle-Matter Hierarchy”, Tohoku University, February 2011).

⑤ Oscillatory Instability of Slow Crack Propagation in Rubbers under Large Deformation, D. Endo (International Symposium on Complex Systems 2011, The University of Tokyo, Dec. 2011).

⑥ Oscillatory Instability of Slow Crack Propagation in Rubbers under Large Deformation, D. Endo (The 4th International GCOE symposium on “Weaving Science Web beyond Particle-Matter Hierarchy”, Tohoku University, Sendai, February 2012).

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

早川 美徳 (HAYAKAWA YOSHINORI)

東北大学・教育情報基盤センター・教授  
研究者番号：21018556