

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 24 年 4 月 23 日現在

機関番号： 12601

研究種目： 基盤研究 (C)

研究期間： 2009 ~ 2011

課題番号： 21540380

研究課題名 (和文) ランダム行列による物性論の位相的問題の研究

研究課題名 (英文) Study of topological condensed matter problems by random matrices

研究代表者 氷上 忍

(Hikami Shinobu)

東京大学・大学院総合文化研究科・教授

研究者番号： 30093298

研究成果の概要 (和文) :

外場があるガウシアンランダム行列模型で、外場を調節することにより、リーマン面のモジュライ空間のトポロジカル普遍量が得られる生成関数を見だし、具体的にこのトポロジカル普遍量を計算した。これらのトポロジカル普遍量は結晶成長で見られる分岐にともなう特異性と関係していることを見だした。外場の変化は、特異点においてパラメーター p で特徴づけられ、この調整パラメーター p を負の値 ($p=-1,-2,\dots$) に解析接続することにより、 $SL(2, \mathbb{R})/U(1)$ のレベル k の Wess-Zumino-Witten 項と等価である事を示した。特に $p=-2$ のときに、それが unitary matrix model を等価である事を証明し、強結合および弱結合両方で unitary matrix model での展開を与える事を確認した。この模型での強結合-弱結合転移をランダム行列理論の観点から議論し、物性論での位相的問題との関連を議論した。外場があるマトリクス模型の時間依存性を 2-matrix model に帰着させ、その代数的構造が W 代数である事を見だし、その構造を $N=2$ 超対称 minimal model からのづれとして、Ramond-Ramond 項への依存性を研究した。

研究成果の概要 (英文) :

The topological invariance of the moduli space of Riemann surface is shown to be obtained from the Gaussian random matrix model with an external source by the tuning of external source. The invariance is classified by a parameter p , which characterizes the degeneracy of the external source. The invariance is related to the p -spin curves on the Riemann surface. This topological singularity is related the bifurcation of the growth of crystals. The parameter p is extended to the negative values ($p=-1,-2,\dots$) and it represents level k $SL(2, \mathbb{R})/U(1)$ Wess-Zumino-Witten term. The case of $p=-2$ corresponds to the unitary matrix model, which has a phase transition. The strong and weak expansion are examined by Gaussian random matrix theory. This transition is studied in the relation of the phase transitions in the condensed matter problems. The time dependence of the random matrix model is studied by the reduction to 2-matrix model and the algebraic structure is investigated in details. The algebraic structure is found to be the associated W -algebra. The structure represents the deviation from $N=2$ supersymmetric minimal model and the change of the Ramond-Ramond term for the time dependence is studied.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	1,400,000	420,000	1,820,000
2010年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2011年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
年度			
総計	3,500,000	1,050,000	4,550,000

研究分野： 数物系科学

科研費の分科・細目： 物理学・ 数理物理・ 物性基礎

キーワード： 数理物理、メゾスコピック系、リーマン面、トポロジー

1. 研究開始当初の背景

- (1) 外場のあるガウシアンランダム行列模型は外場を調節することにより一連の分岐の特異性を記述出来ることが考えられるが、それらの特異性の物理的意味およびその応用例はよく知られていない。
- (2) リーマン面のモジュライ空間でのトポロジカル普遍量は数学や弦理論では基本的な重要な量であり、その計算方法の開発および双対性の研究は重要であり、更なる研究を必要としている。
- (3) ガウシアンでないランダム行列として、固有値が円周上にある unitary 模型が存在するがその3次相転移は物性の問題でも多くの応用があり、そのトポロジカル普遍量は未知である。
- (4) non-compact な $SL(2, \mathbb{R})$ の2次元ブラックホール解が知られているが、ランダム行列理論との関係はあきらかでない。ブラックホールとランダム行列 (ユニタリ行列) の関係は Susskind らにより指摘されている。
- (5) 近藤効果でのレベル k の解と Wess-Zumino-Witten 模型の $SU(2)$ でのレベル k との関係はそれほど研究されていなく、未知のことが多い。

2. 研究の目的

- (1) トポロジカル普遍量は量子ホール効果やトポロジカル絶縁体など物性の問題でも重要であるが、ランダム行列で外場を調節する事により興味深い $N=2$ の超対称性を持ったトポロジカル普遍量を与える生成関数を得る事が出来て、その詳細な研究を行い、物性論でのトポロジカルの問題に適用する。
- (2) これらのトポロジカル普遍量は $N=2$ の超対称性 minimal model の特異性と関係していることをより明確にし、物性論でみられる相転移点での臨界指数との関係を明らかにする。
- (3) ユニタリ行列模型での相転移を外場のあるガウシアンランダム行列理論から考察し、ユニタリ行列模型での Brezin-Gross-Witten 模型の相転移を理解する。
- (4) 流体力学でみられるような分岐の特異性 (たとえば Hele-Shaw flow) の時間発展を調べるのに、時間依存のランダム行列理論を進展させて、その代数的構造を明らかにする。

3. 研究の方法

- (1) 任意の外場のあるガウシアンランダム行列での固有値の相関関数を解析的に求める。外場の固有値を特定の場合に調節して、行列のサイズを無限大にした極限をとる。
- (2) その時、現れる特異性をリーマン面でのモジュライ関数で分類し、点付きリーマン面上での p -スピン曲線の交点数とその代数的構造を研究する。
- (3) 双対定理を使って、ランダム行列を双対な別なランダム行列理論に書き直し、トポロジカル普遍性を計算する。
- (4) Unitary 行列模型で知られている弱結合と強結合の間の相転移を外場のあるガウシアン模型から外場を調節することにより、導出して、そのトポロジカル普遍量を計算する。
- (5) 時間依存のランダム行列模型を等価な 2-matrix model に書き直し、新しい行列模型を得て、そのトポロジカル普遍量を研究する。
- (6) Wess-Zumino-Witten model との対応を研究し、 $N=2$ 超対称性のやぶれを理解する。

4. 研究成果

- (1) 外場の行列の固有値を縮重させて調節することにより、ガウシアン行列の固有値の状態密度の端点で特異性を生じさせることが出来る。この特異性を記述するパラメーターとして、高次 Airy 関数の特徴付ける次数を表すパラメーター p が存在する。リーマン面のモジュライ空間の p -スピン曲線の交点数をこの外場があるガウシアン模型で計算する事が出来る。Airy matrix model は $p=2$ に相当する。 $p=3$ は Pearcey matrix model と呼ばれる。Stokes 線の数は $p+1$ となる。固有値の相関関数のフーリエ変換が交点数を与える生成関数になり、Witten の交点数を与える積分表示が得られた。
- (2) この p 次特異性は $N=2$ 超対称性 minimal model で得られる特異性と同じで、 $SU(2)/U(1)$ Wess-Zumino-Witten 模型と同値である事が分かる。このとき、 $SU(2)/U(1)$ WZW 模型のレベル k とは $p=k+2$ の関係がある。近藤効果での $SU(2)$ 模型でのレベル k との関係を検討した。

- (3) パラメーター p を負の値に解析接続することにより $SL(2, R)/U(1)$ の WZW 項を得ることが出来ることが判明した。 $p=-1$ の時、Harer-Zagier による Euler 特性類の計算結果と一致することを得た。この Harer-Zagier の結果を明示的に積分表示することができた。
- (4) $p=-2$ の場合、unitary 模型と等価になることを示すことが出来た。ユニタリ行列で Brezin-Gross-Witten 転移と呼ばれる相転移が知られているが、この相転移が強結合-弱結合領域の転移であることをこの同値な $p=-2$ のランダム行列理論で示す事が出来て、それぞれの展開級数を求めることが出来た。
- (5) $p=-3$ の時は 2 次元ブラックホールと関係すると思われ、Susskind による Brezin-Gross-Witten 転移とブラックホールの関係の指摘を参考に、ブラックホールのエントロピーと $p=-3$ の場合の自由エネルギーを比較検討した。
- (6) 時間依存の外場があるランダム行列模型が 2 matrix model に帰着できることを示し、外場を調節して、Airy 行列模型に対数ポテンシャルがある模型を得た。この模型は端点近くの異なる時間の相関関数を与える。そのトポロジカル普遍量と内蔵する代数的構造 (W 代数) を明らかにした。この対数ポテンシャルがある場合は、交点数での Ramond-Ramond 項は独立に存在せず、他の項と結合して、recursion equation にあられ、その現れ方は W_3 代数となっていることを確かめた。
- (7) 結晶成長の分岐過程や Hele-Shaw flow を行列模型で考察した。時間依存のランダム行列で考察し、珊瑚などの成長、酵母の分裂成長などの生物系への応用研究を試みた。
- (8) タンパク質相互作用のネットワークを行列表現し、その固有値の間隔確率をデータベースを使い計算し、ランダム行列理論の GOE (Gaussian Orthogonal ensemble) の間隔確率と比較して、GOE の結果と合致することを見いだした。GOE と合わない場合は p -次特異性の間隔確率と比較し、そのクロスオーバーを研究した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 3 件)

(1) E. Brezin and S. Hikami,

Computing topological invariants with one and two-matrix models, JHEP 04 (2009) 110.

(2) E. Brezin and S. Hikami,

Duality and Replica for a Unitary Matrix Model, JHEP07(2010), 67.

(3) E. Brezin and S. Hikami,

On an Airy matrix model with a logarithmic potential, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. 45 (2012) 045203.

[学会発表] (計 2 件)

(1) S. Hikami,

“Duality and replicas for a unitary matrix model” Conference Topological strings, modularity and non-perturbative physics, July 28 (2010), The Erwin Schrodinger International Institute for Mathematical Physics, Wien.

(2) S. Hikami,

“On an Airy matrix model with a logarithmic potential” August 22 (2011), Ecole Normale Superieure, Paris.

[図書] (計 1 件)

E. Brezin and S. Hikami,

The Oxford Handbook of Random Matrix Theory. Edited by G. Akemann et al, Chap 19, Characteristic polynomials P.398-414. Oxford University Press (2011).

[産業財産権]

○出願状況 (計 0 件)

○取得状況 (計 0 件)

[その他]

ホームページ

<http://www.oist.jp/ja/数理理論物理学ユニット>

<http://www.oist.jp/mathematical-and-theoretical-physics-unit>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

氷上 忍 (Hikami Shinobu)

東京大学・大学院総合文化研究科・教授

研究者番号：30093298

(2) 研究分担者

()

研究者番号：

(3) 連携研究者

()

研究者番号：