

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 24 年 5 月 30 日現在

機関番号：14301

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2009～2011

課題番号：21560173

研究課題名（和文）非圧縮粘性流体の漸近的数値解法の理論的研究とその応用

研究課題名（英文）Theory and application of asymptotic numerical method for the incompressible viscous flows

研究代表者 大和田 拓

(TAKU OHWADA)

京都大学・大学院工学研究科・准教授

研究者番号：40223987

研究成果の概要（和文）：

非圧縮 Navier-Stokes 方程式系に対して新しい擬似圧縮性法を開発した。この解法はポアソン方程式を解かずに圧力場を求めることができ、しかもパラレル計算に適したアルゴリズムを構築できる。種々の代表的な試験問題において既存の解法との比較が行われ、工学上の複雑な形状の問題に適した解法であることが示された。格子ボルツマン法は実質的に擬似圧縮性法と同じ偏微分方程式系を解いているが、その気体論を用いた定式化の意義は見出されなかった。

研究成果の概要（英文）：

A new artificial compressibility method for the incompressible Navier-Stokes equations is developed. This method is Poisson free and provides a suitable algorithm for the parallel computations. Comparisons are made with various existing methods and its performance is shown to be well suited for practical engineering problems with complex geometries. It is theoretically shown that the lattice Boltzmann method essentially solves the same PDE system that the present artificial compressibility method does. The capabilities of these methods are nearly identical and no outcome of the kinetic formulation in the lattice Boltzmann method is found in the present study.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
21年度	1200000	360000	1560000
22年度	600000	180000	780000
23年度	800000	240000	1040000
年度			
年度			
総計	2600000	780000	3380000

研究分野：

科研費の分科・細目：

キーワード：

1. 研究開始当初の背景

非圧縮粘性流体解析は幅広い産業分野から多くのニーズがあり、その数値解析法の研究は CFD の一大基幹分野である。現在までに提案された様々な解法にはそれぞれ長所・短所があり、精度、汎用性、そして効率性のい

ずれも高いという研究者・技術者が渴望している解法は、未だ出現していない。ユーザーの裾野の広さを鑑みてさらに欲を言えば、流体力学の基礎を学んだ技術者がその理論を容易に学習できるような解法が望ましい。

非圧縮粘性流体解析では衝撃波等の不連続面を扱う必要がない反面、圧力の決定が問題になる。これは圧縮性流体方程式の場合、圧力は発展的に決まるのに対し、非圧縮の場合はそのメカニズムが縮退し、ソレノイダルな流速場が維持されるように決定されることによる。渦度、流れ関数、ベクトルポテンシャル等の導入によって圧力を消去した方程式系に対する解法が提案されているが、工学で扱うことが多い複雑形状の問題の場合には素直に流速と圧力を求める定式化が適していると言われている。しかしこの定式化では Poisson 方程式の解法等の反復計算が必要となり、プログラムの複雑化を招き、流体力学よりは連立方程式の解法となってしまう。また近年主流となっているパラレル計算においても効率の点で望ましいとはいえない。

一方、Mach 数の二乗展開によって圧縮性流体方程式から非圧縮性流体方程式が導かれることはよく知られている。著名な応用数学者の Chorin や Temam はある単純化された圧縮性流体方程式を発展的に解くことで非圧縮 Navier-Stokes 方程式の解を求めるといふ擬似圧縮性法を提案した。このアプローチの理論的正当性は、Temam が証明したように擬似圧縮性流体力学方程式系の解の Mach 数がゼロの極限が非圧縮性流体方程式の解（弱解）へと収束することによって与えられる。しかし実際の数値計算でこのような極限に素直に従うと CFL 条件の制限からは効率的でないと考えられ、Mach 数は 0.1 ~ 1 程度の値に緩められ、もっぱら定常解を求める解法と見なされてきた。非定常の問題における応用も検討されているが、Mach 数を先ほどの値程度にとどめる為、各時間ステップで数値解はソレノイダル条件を満たさない。そこで擬似的な時間をさらに導入し、各時間ステップ毎にソレノイダル条件を満たすように擬似時間に関して反復計算を行う方法が提案されている。この反復計算は実質的にポアソン方程式を解くことに対応するが、収束を早めるために導入される手順が複雑でパラレル計算に適したアルゴリズムを構築することは容易ではない。

一方、格子 Boltzmann 法は反復計算を用いずに時間発展を正しく追跡でき（一次精度）、しかもパラレル計算機に適したアルゴリズムが構築できる解法として現在精力的な研究が行われている。同解法は非常に粗く離散化された気体論方程式の時間発展を追うことで非圧縮 Navier-Stokes 方程式の解の時間発展を求める解法である。その理論的根拠として Knudsen 数と Mach 数を同程度の速さで小さくする流体力学的極限において（離散）気体論方程式から非圧縮 Navier-Stokes 方

式が導かれることが挙げられる。同解法はこの意味で擬似圧縮性法と同様に漸近的解法である。しかし気体分子の速度分布関数を經由する点で擬似圧縮性法よりもさらに間接的な方法になっている。もう少し詳しく説明すると、格子 Boltzmann 法の理論的根拠としては先に述べた方程式レベルの漸近解析では実は不十分であり、空間および時間に関する打ち切り誤差の寄与も同時に扱う漸近解析が必要となる（これは同解法の実際の数値計算では Reynolds 数が解像度に応じて修正されることから解る）。しかしこのような漸近解析は流体力学の分野だけに限らず応用数学の分野でもあまり馴染みがなく、同解法の正統な理論的基盤が確立したのは最近のことである（文献 Journal of Computational Physics, 210, 676-704, 2005 を参照）。同解法の理論は気体論の漸近解析に不慣れな一般の技術者にとっては易しくないが、実際の計算アルゴリズムは単純であることから様々な複雑流体の分野へと展開されつつある。しかしその理論の二重の間接性のために、同解法の研究者ですら、例えば希薄化効果に関する曖昧な議論に陥ってしまうというような混乱が生じているのも否めない。同解法はアルゴリズムが簡単なために、技術者向けの流体解法として注目されている。しかし簡単なアルゴリズムは簡単な応用を必ずしも意味しない。実際、例えば異なる解像度の数値解の接合を行う場合には、漸近解析の知識が不可欠になる。これが簡単なアルゴリズムの解法であるにもかかわらず、現在でも多くの論文が発表されている理由になっている。

2. 研究の目的

本研究では弱圧縮性流体方程式系の枠組みで、非圧縮 Navier-Stokes 方程式の漸近的数値解法の研究を行う。本研究で波次の目標を掲げた。

(1) 数値解に対する漸近解析を行って計算誤差として現れる漸近解の高次の項の挙動を明らかにし、それを打ち消す工夫を行うことで高次精度を達成する。この過程で数値解の挙動を理論的に明らかにする。

(2) (1) に関連し、境界条件の精度を高次精度に拡張する。

(3) 漸近解の振舞を阻害する音波を抑制する新しい機構を弱圧縮性流体方程式に組み込む。

(4) 数値計算では、全ての流体力学的変数の値が定義されるコロケイテッドな格子を

用いることが便利である。しかしこの場合にはチェッカーボード不安定性が生じることがよく知られており、それを簡単に抑制する新しいメカニズムを見つけ擬似圧縮性方程式に組み込む。

(5) 工学の問題ではいつも十分な解像度で計算が行えるとは限らない。そのような場合でも安定に計算でき、妥当な結果を与えるような解法が望ましい。このような堅牢性に関する研究を行う。

(6) 計算方法は、まず直交構造格子に対するものを開発するが、工学の問題では物体の形状は曲面を有する場合が多々ある。そのような場合を直交構造格子で扱う際には、一次元的な補間が採用されているが、そこでは精度が著しく失われることが予想される。そこで物体にフィットした構造・非構造格子系に対応できるように、擬似圧縮性法を有限体積法へ拡張する。

(7) これらの研究成果を基に、現在多くの研究がおこなわれている格子ボルツマン法との比較・検討を行う。

3. 研究の方法

研究は以下の項目に対して行った。

(1) 擬似圧縮性流体力学方程式系の小さい Mach 数に対する漸近解析を行った。

(2) 擬似圧縮性流体力学方程式系に対する差分スキームを構築し、解像度と Mach 数が同時に小さくなる極限を考え、その漸近解析を行った。

(3) 音響モード解の発生を抑制は本研究の成功の鍵を握る重要な課題の一つである。前項(2)の漸近解析で得られた漸近解はマッハ数の二乗展開の形で与えられ、無限項からなる漸近解を初期値として用いれば音波は理論的には発生しない。しかし実際の計算の初期値は有限(実用的にはせいぜい非圧縮 Navier-Stokes 方程式に対応する初項までで打ち切る)ので、その初期における非適合性が撃力となって、音響モード解の発生は不可避である。擬似圧縮性流体力学方程式系の音響モード解に対する方程式を導出し、音響モード解を抑制するメカニズムを探った。

(4) チェッカーボード不安定性の抑制に関して、Rhie-Chow の方法が知られているが、これとは異なる新しいメカニズムを探った。

(5) 高次の人工的な散逸項をスキームに付加することで計算スキームの堅牢性を向上

させる研究を行った。

(6) 項目(3)～(5)で研究された擬似圧縮性流体力学方程式の改良は非圧縮 Navier-Stokes 方程式の数値解の精度に影響を与えてはならない。改良された方程式系の計算スキームに対して漸近解析、安定性解析を行った。

(7) 曲がった形状の物体周りの流れを精度よく計算できるように、直交格子以外の構造格子・非構造格子が利用しやすい有限体積法に擬似圧縮性法を拡張した。

(8) 擬似圧縮性法と格子ボルツマン法との関係を理論的に明らかにするとともに、格子ボルツマン法と同じアルゴリズムで擬似圧縮性法を計算する計算法を開発した。

(9) 時間的に周期的になるように一般化された Taylor-Green の問題、2次元キャビティ流れ、背面ステップを過ぎる流れ、四角柱、円柱を過ぎる流れ、円筒クウェット流、振動円柱の周りの流れ、3次元キャビティ流れ、球を過ぎる流れの等様な問題の数値解析を行い、格子ボルツマン法を含む既存の解法の結果との比較検討を行った。円柱や球を過ぎる流れの解析においては異なる解像度の格子系が使われたが、解の接続も特別な手当てなしで問題なく行えた。

4. 研究成果

得られた研究成果は以下の通りである。

(1) 系統的な漸近解析によって、擬似圧縮性法が非定常の場合でも非圧縮 Navier-Stokes 方程式の近似解を与えることを示した。その誤差はマッハ数の二乗程度であり、その初項は線形のオゼーン方程式系で与えられることが示された。この誤差の性質を利用すれば、同じ解像度で2つの異なるマッハ数で得られた結果の線形結合を計算することによって誤差の初項が相殺されるということが分かる。これは Richardson の補外とよく似ているが、解像度が同じという点で異なっている。この手法の有効性は初期値問題および初期値境界値問題の数値計算で具体的に検証され確認された。その検証の為に物体表面における高次精度(4次精度)の境界条件の計算法も開発された。

(2) 音響モード解を抑制するために擬似圧縮性方程式系の連続の式に簡単な項を組み込むことで副作用なしに音響モード解を減衰させることに成功した。

(3) 擬似圧縮性方程式系の連続の式に簡単

な項を組み込むことで副作用なしにチェックボード不安定性現象を抑制させることに成功した。

(4) 高次の人工的な散逸項を擬似圧縮性方程式系の運動方程式に組み込むことで、副作用なしに低解像度における安定性が著しく向上した。

(5) 直交格子を用いた差分擬似圧縮性法と物体に沿った構造格子系を用いた有限体積擬似圧縮性法との詳細な比較を、厳密解が知られる円筒クウェット流の問題で行ったところ、以下の知見が得られた。流速、圧力に関していずれの解法もその誤差は同じ程度の大きさであり、解像度（格子幅）の二次程度であるが、物体に働くトルクに関しては直交格子を用いた場合には精度の低下が生じたが、物体に沿った格子系を持ちいる場合には精度の低下は見られなかった。直交格子を用いる場合には物体境界近傍で1次元的な補間を用いるが、その補完によって物理量の微分係数の精度が低下することによることによる。このことは計算以前に十分予想できたことであるが、本研究ではそのことが明示された。このことから例えば境界層を含む高レイノルズ数流れの計算には直交格子を用いることは有利ではないことが分かる。

(6) 種々の数値計算例で擬似圧縮性法は工学上の計算で既存の解法と遜色ない性能を有することが示された。特に格子ボルツマン法との比較では、同解法の優位性は確認されなかった。計算時間に関しても同程度である。このことから、気体論に基づく非圧縮流れの新しい解法として注目されてきた同解法には気体論は本質的な役割を果たしていないことが理論的にも（項目(1)）数値的にも確認された。格子ボルツマン法に関してはこれまで膨大な数の論文が出版されているが、このような知見ははっきりと示されたのは研究代表者の知る限りでは初めてのことである。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 3 件)

Asinari P, Ohwada T, Chiavazzo E, Rienzo A, Link-wise artificial compressibility method, Journal of computational physics (査独あり) [掲載予定]

<http://dx.doi.org/10.1016/j.jcp.2012.04.027>

Ohwada T, Asinari P, Yabusaki D, Artificial compressibility method and lattice Boltzmann method: Similarities and differences
COMPUTERS & MATHEMATICS WITH APPLICATIONS (査独あり) 巻 61 号: 2011年, 3461-3474.
DOI: 10.1016/j.camwa.2010.08.032

Ohwada T, Asinari P, Artificial compressibility method revisited: Asymptotic numerical method for incompressible Navier-Stokes equations
JOURNAL OF COMPUTATIONAL PHYSICS (査独あり) 巻 229, 2010年, 1698-1723.
DOI: 10.1016/j.jcp.2009.11.003

[学会発表] (計 6 件)

Ohwada T, Artificial compressibility method and lattice Boltzmann method
DSMC11 2011年9月28日 Santa Fe, NM, USA
(招待講演)

Ohwada T, Artificial compressibility method and lattice Boltzmann method II
International conference on mesoscopic method in engineering and sciences 11, 2011年7月8日, National Institute of Sciences, Lyon, France

Yabusaki D, Ohwada T, Asinari P
Simple treatment of curved boundary in artificial compressibility method
International conference on mesoscopic methods in engineering and sciences 2010年7月15日, University of Alberta, CANADA

Ohwada T
Kinetic methods in computational fluid dynamics
International conference on mesoscopic methods in engineering and sciences
2010年7月14日 University of Alberta, CANADA (招待講演)

Ohwada T
Kinetic methods in CFD

Asian computational fluid dynamics
conference
2010年1月11日 香港科学技術大学
(招待講演)

Ohwada T

On the potential abilities of artificial
compressibility method
International conference for mesoscopic
methods in engineering and science
2009年7月17日 華中科学技術大学

6. 研究組織

(1) 研究代表者

大和田 拓 (TAKU OHWADA)
京都大学・大学院工学研究科・准教授
研究者番号：40223987

(2) 研究分担者

()

なし

研究者番号：

(3) 連携研究者

Pietro Asinari
Dipartimento di energetica
Politecnico di Torino
Associate Professor