

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年 4月15日現在

機関番号：11301

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2009～2011

課題番号：21654001

研究課題名（和文）数論的微分方程式から決まる数論多様体の局所的・大域的研究

研究課題名（英文）A local and global study of arithmetic varieties determined by arithmetic differential equations

研究代表者

都築 暢夫 (TSUZUKI NOBUO)

東北大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：10253048

研究成果の概要（和文）：一般高次超幾何関数を周期積分に持つ射影直線上の数論的カラビ・ヤウ多様体族を構成し、ベッチ、ド・ラム、エタール、クリスタリンの各実現に対する相対コホモロジーを決定した。この多様体族は、楕円曲線のルジャンドル族の高次元化である。具体的に与えられる特異点解消によりカラビ・ヤウ族が得られ、0の周りでこの族は半安定的な退化を持つ。重みスペクトル系列を適用して、コホモロジーが計算できる。さらに、有理ファイバーのモジュラー性に関する結果も得た。

研究成果の概要（英文）：We constructed an arithmetic family of Calabi-Yau varieties on the projective line whose period integral is a generalized hypergeometric function, and determined the relative cohomology of Betti, de Rham, étale and crystalline realizations. This family is a higher dimensional version of Legendre's family of elliptic curves. The family of Calabi-Yau is obtained by a desingularization which is given explicitly, and has a semistable degeneration at 0. The cohomologies can be calculated by applying weight spectral sequences. Moreover, we have a result on modularity for rational fibers.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	1,560,000	0	1,560,000
2010年度	1,040,000	0	1,040,000
2011年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
年度			
総計	3,400,000	240,000	3,640,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：数論幾何、超幾何微分方程式、カラビ・ヤウ多様体、数論的多様体族、数論的半安定族、モノドロミー・重みスペクトル系列、保型性

1. 研究開始当初の背景

数理論理学と接点を持つことから、カラビ・ヤウ多様体の鏡対称性やモジュライ上の接続の研究は多くなされてきた。しかし、有理整数環上の構造まで含めて、数論的な視点

で研究が行われているのは、フェルマー多様体の変形族の場合などあまり多くはない。一方、数論的な微分方程式に関しては、ドウオークがp進的な振る舞いを研究しているが、大

域数論的な振る舞いはその微分方程式を周期微分方程式に持つ完備かつ滑らかな数論的多様体族の構成が難しいために、高次元の非自明な例は殆ど知られていない。

連携研究者の山内と研究代表者の都築は、3次元多様体族のボイカーズやゲーメンの仕事から、モジュラー形式へのヘッケ作用の積と合同関係がある二項係数のある種の和を考察し、高次超幾何微分方程式や高次超幾何局所系に興味を持ち、その背景にある幾何の考察を開始した。2次元の場合は、70年代の猪瀬・塩田らのK3曲面族が対応し、小野らがL関数を決定している。しかし、3次元を含めて、高次元の場合にはその幾何はほとんど何もわかっていない。

テーラーを始めとする近年のモジュラー性の研究により、大域的な局所系のモジュラー性やそのL関数の解析接続性など多くの成果が上がっているが、高次元の具体的な例は殆ど知られていないので、新たな例を作ることが期待されていた。

2. 研究の目的

ガウス超幾何関数 ${}_2F_1(\lambda)$ は、複素射影直線上の4点 $0, 1, 1/\lambda, \infty$ で分岐する多価関数の積分で与えられ、楕円曲線のルジャンドル族上での周期積分と解釈できる。超幾何関数はルジャンドル族から定まる超幾何微分方程式と呼ばれるガウス・マニン接続の解になる。ルジャンドル族は $S = \text{Spec} \mathbb{Z}[1/2][\lambda, 1/\lambda(1-\lambda)]$ 上の滑かな多様体族になり、その幾何が超幾何関数 ${}_2F_1(\lambda)$ や超幾何微分方程式の数論的性質を決めている。反復積分で定義される n 次ガウス超幾何関数 $n+1F_n(\lambda)$ は、ルジャンドル族と同様に、複素射影直線から3点 $0, 1, \infty$ を除いた曲線上の n 次元カラビ・ヤウ多様体族の周期積分である。このカラビ・ヤウ多様体族は、 S 上の滑らかな

多様体族 X_n (以下、超幾何カラビ・ヤウ族と呼ぶ)になる。さらに、この反復積分はモチビックな解釈を持ち、 S 上の高次超幾何局所系 HG_n を定める。この研究では、超幾何カラビ・ヤウ族 X_n の幾何を考察して、以下の問題の解決を目指す。

- (1) S 上の族 X_n の相対コホモロジーの決定
- (2) 局所系 HG_n の Z 上の繊維のL関数の決定とモジュラー性の考察
- (3) 数論的微分方程式の形式解の分母の p 進対数的増大度の振る舞いと p に関する大域的振る舞い

3. 研究の方法

(1) 超幾何カラビ・ヤウ族 X_n の相対コホモロジー: $Z[1/2]$ 上の射影直線から $0, 1, \infty$ を除いたスキーム S 上の超幾何カラビ・ヤウ族 X_n は、方程式

$$y^2 = x_1 \cdots x_n (1-x_1) \cdots (1-x_n) (1-x_1 \cdots x_n \lambda)$$

で定まるアフィン多様体 Y_n のあるコンパクト化のある特異点解消である。この特異点解消は、組み合わせ論的アルゴリズムを持つ。 $n=1$ のときは、 X_1 は Y_1 に無限遠点を加えたものあり、 S 上の1次の相対コホモロジーが1次の超幾何局所系 HG_1 になる。これは、次のように解釈できる。 X_1 は S 上滑らかで固有であることから、相対コホモロジーは局所系になる。 $\lambda=0$ で X_1 は乗法的還元を持ち、重み-モノドロミー・スペクトル系列を適用すると、一般点における1次のベッチ数は2となる。1次の相対コホモロジーは階数2の超幾何局所系 HG_1 を直和因子に持つのでちょうどそれになる。1次元の場合から示唆されることは、 X_n の S 上の相対コホモロジーは、 $\lambda=0$ での半安定モデルを決定して、重み-モノドロミー・スペクトル系列を適用すれば計算可能であろうということである。 n が小さいときは、 $\lambda=0, \infty$ では、 X_n の半安定モ

デルには既約成分に射影空間の直積のみしか現れないようであり、半安定化の良いアルゴリズムを見つければ、重み-モノドロミー・スペクトル系列を計算できる。その際、主に利用するコホモロジー理論は、研究代表者の今までの研究テーマであるドラム・コホモロジーとリジッド・コホモロジーを用いる。両理論の間には比較定理があるので、標数0と $p > 0$ の間を自由に行き来することができる。

(2) 局所系 HG_n の Z 上の繊維の L 関数の決定とモジュラー性の考察：テラーらのモジュラー性の判定条件を Z 上の HG_n の繊維に適用可能か考察し、必要な一般化を図る。また、 L 関数の関数等式は、セールにより一般的に予想されている式をこの場合に確認する。

(3) 数論的微分方程式の形式解の分母の p 進対数的増大度の振る舞いと p に関する大域的振る舞い：局所的問題として、 p 進対数的増大度に関するドウオークの問題について、パドバ大学のキアレロットと研究代表者による階数2の場合の一般化を計る。高次超幾何微分方程式系の場合に p に関する大域的振る舞いを考察する。 $n=1$ の場合は、 X_1 は代数体の整数環上の楕円曲線を繊維に持つので、エルキースの定理より Z 上の繊維に対して通常還元を持つ p の密度の評価ができる。しかし、楕円曲線の場合を除くと、自明な場合を除いて、還元型による素数の密度の評価はできていない。大域的な形式解の存在が唯一の手がかりである。 $n=1$ の場合に、対数的増大度と大域的振る舞いの関係を考察し、その一般化を図る。

4. 研究成果

以下の研究成果を得た。

- (1) 高次ガウス超幾何関数を周期積分に持つ射影直線から3点 $0, 1, \infty$ を除いた代数曲線上のカラビ・ヤウ多様体族 X_n (高次超幾何カラビ・ヤウ族とよぶ)の構成とその相対的コホモロジーの決定
- (2) 高次超幾何局所系の有理繊維のモジュラ

一性と付随する L 関数の関数等式の決定

(3) 代数曲線上の F アイソクリスタルの形式解の対数的増大度に関するドウオーク予想の部分的解決と対数的増大度とフロベニウス傾きが一致する必要十分条件

(1)は研究代表者の都築によるもので、数論的半安定族の構成、一般点におけるピカル数の決定、代数的サイクルとコホモロジー環の関係に成果を得た。ガウス超幾何カラビ・ヤウ族は、楕円曲線のルジャンドル族の自然な拡張になっていて、高次元の数論的多様体の具体例を与えた重要な萌芽的研究である。多様体族としての特異点解消や0での数論的半安定族としての拡張を利用して、ベッチ、ド・ラム、エタール、クリスタリンの各実現でコホモロジーを決定した。相対コホモロジーは平坦な代数的サイクルで生成されることも証明した。

(2)は連携研究者の山内によるもので、 n が奇数のときのカラビ・ヤウ多様体族 X_n の射影直線上の2の整数べきでないような点での HG_n の各繊維のガロア表現の潜在的モジュラー性を証明し、セールにより予想された L 関数の関数等式が成り立つことを示した。テラーらによるモジュラー性の判定条件を適用して、この場合のモジュラー性を得た。

(3)はパドバ大学のキアレロット教授と研究代表者の都築との共同研究で、(a)生成点における有界 F アイソクリスタルがフロベニウス傾きフィルトレーションに関して分裂することと(b)PBQ加群の場合に対数的増大度とフロベニウス傾きが一致することを証明した。この結果、ドウオーク予想の帰納的な扱いが可能になり、解決に向けた重要な進展を得た

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計5件)

1. Daniel Caro, Nobuo Tsuzuki, Overholonomicity of overconvergent F -isocrystals over smooth varieties, *Annals of Math.*, 2012, 印刷中, 査読有.
2. Fumio Sairaiji, Takuya Yamauchi, The rank of Jacobian varieties over the maximal abelian extensions of number fields: Toward Frey-Jarden's conjecture

- e, The journal of the Canadian Mathematical Bulletin, 2012, 印刷中, 査読有.
3. Bruno Chiarellotto, Nobuo Tsuzuki, Log-growth filtration and Frobenius slope filtration of F-isocrystals at the generic and special points, Documenta Math. 16 (2011), 33-69, 査読有.
 4. Takuya Yamauchi, A generalization of Sen-Brinon's theory, Manuscripta Math. 133 (2010), 327-346, 査読有.
 5. Bruno Chiarellotto, Nobuo Tsuzuki, Logarithmic growth and Frobenius filtrations for solutions of p-adic differential equations, J. Inst. Math. Jussieu 8 (2009), 465-505, 査読有.

[学会発表] (計 19 件)

1. 山内卓也, L-function of some Siegel threefold of low level: non-neat case, Workshop on p-adic arithmetic geometry and motives, 2012年1月25日, 東北大学
2. 都築暢夫, Arithmetic families of Calabi-Yau varieties having a generalized hypergeometric function as a period integral, 代数的整数論とその周辺, 2011年11月28日, 京都大学
3. 都築暢夫, ある一般超幾何関数を周期積分に持つ数論的カラビ・ヤウ多様体族について, 代数学セミナー, 2011年11月4日, 九州大学
4. 山内卓也, 超幾何層に付随する Calabi-Yau 多様体とその応用, 第147回数理情報科学談話会, 2011年4月22日, 鹿児島大学
5. 山内卓也, 超幾何層に付随するカラビヤウ多様体族について, 近畿大学数学講演会, 2011年2月14日, 近畿大学.
6. 都築暢夫, A family of Calabi-Yau related to certain generalized hypergeometric local systems, from p-adic differential equations to arithmetic algebraic geometry, 2011年2月5日, パドバ大学(イタリア).
7. 都築暢夫, Rigid cohomology, 2010年台湾数学会年会, 2010年12月11日, 国立彰化師範大学.
8. 都築暢夫, Log-growth and Frobenius for p-adic differential equations, Berkovich Spaces and p-adic Differential Equations, 2010年11月8日, ストラスブルク大学(フランス).
9. 山内卓也, GSp(4)の肥田理論の紹介, GSp(4)の数論を中心とした基礎的ワークショップ, 2010年8月6日, 大阪大学.
10. 都築暢夫, Overconvergent F-isocrystals and rigid cohomology on curves, Summer school "p-adic cohomologies and arithmetic applications", 2010年6月15日-18日, セビリア大学(スペイン).
11. 都築暢夫, Generalized hypergeometric functions and arithmetic families of Calabi-Yau varieties, 玉原数論幾何研究集会 2010, 2010年5月26日, 東京大学玉原国際セミナーハウス.
12. 山内卓也, 超幾何層に付随するカラビヤウ多様体とその応用について, 大数理セミナー -- 保型形式の整数論月例セミナー, 2010年5月15日, 東京大学.
13. 都築暢夫, リジッド・コホモロジー論の最近の進展, 日本数学会年会, 平成22年3月26日, 慶応大学.
14. 都築暢夫, H^1 of rigid cohomology for geometrically unibranch varieties, Séminaire de Géométrie Arithmétique et Motivicque, 平成22年1月29日, パリ北大学(フランス).
15. 山内卓也, A Calabi-Yau family associated to some hypergeometric sheaf and its applications, Kobe Number Theory Workshop, 平成22年1月15日, 神戸大学.
16. 山内卓也, 超幾何層に付随する Calabi-Yau 多様体族とその応用, p-進特殊関数と数論幾何, 平成21年10月28日, 蔵王町.
17. 都築暢夫, 超幾何層に付随する Calabi-Yau 多様体族について, p-進特殊関数と数論幾何, 平成21年10月28日, 蔵王町.
18. 都築暢夫, On rigid cohomology with partially compact supports, Mini-workshop on isocrystals, 平成21年10月16日, 東北大学.
19. 山内卓也, GSp4に対するセール予想、同伴形式、テータ作用素, 東北大学代数学セミナー, 平成21年7月9日, 東北大学.

[図書] (計 0 件)

[産業財産権]

○出願状況 (計 0 件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
出願年月日:
国内外の別:

○取得状況 (計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

都築 暢夫 (TSUZUKI NOBUO)
東北大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：10253048

(2) 研究分担者

()
研究者番号：

(3) 連携研究者

山内 卓也 (YAMAICHI TAKUYA)
鹿児島大学・教育学部・准教授
研究者番号：90432707