

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年 5月10日現在

機関番号：24402

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2009～2011

課題番号：21654005

研究課題名（和文） 無限次元代数多様体上のD加群とその表現論への応用

研究課題名（英文） D-modules on infinite-dimensional algebraic varieties and their application to representation theory

研究代表者

谷崎 俊之（TANISAKI TOSHIYUKI）

大阪市立大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：70142916

研究成果の概要（和文）：アフィン・リー代数の臨界レベルにおける既約最高ウェイト加群の指標公式の証明が目標であったが、解決には至らなかった。関連する問題として、ベキ根での量子群の表現論の研究を行い、その局所化や中心の構造に関する成果を得た。

研究成果の概要（英文）：The main purpose of this research was to give a proof of the character formula for irreducible highest weight modules over affine Lie algebras at the critical levels. We could not solve the problem itself; however, we investigated the related problems concerning the quantum groups at roots of 1, and obtained several results such as the localization theorem on flag manifolds and the structure theorem for the center.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	1,100,000	0	1,100,000
2010年度	1,000,000	0	1,000,000
2011年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
年度			
総計	3,000,000	270,000	3,270,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：代数解析

1. 研究開始当初の背景：

研究代表者は、90年代に柏原正樹と共同でアフィン・リー代数の最高ウェイト表現の研究を行い、多くの最高ウェイトについて、既約指標に関するKazhdan-Lusztig型指標公式の証明を与えた。より具体的には、正レベル・負レベルの最高ウェイトに関しては、上に述べた問題を完全に解決した。

その時点で未解決なまま残っていたのは、正レベルと負レベルの境界に位置する臨界レベルの

最高ウェイトをもつ既約表現の指標公式の記述である。

この場合の研究も以前から活発に行われており、80年代におけるFeigin-Frenkelの研究、同じく80年代の林孝弘らによるKac-Kazhdan予想の解決、より最近では荒川知幸によるW代数を用いた研究がある。

しかし、これらの研究で扱われていたのは、臨界レベルのウェイトのうちの特異なものに限られている。

すべての臨界レベルのウェイトに関して通用する指標公式は、いわゆる周期的Kazhdan-Lusztig多項式を用いて記述できるものと予想されていたが未解決なままであった。

既に解決されていた、正レベルと負レベルの場合には、その証明には、旗多様体上のD加群の理論が用いられていた。

より正確には、正レベルの場合には、有限次元スキームの直極限としての無限次元旗多様体が、また負レベルの場合には、有限次元スキームの射影極限としての無限次元旗多様体が関連する。これらと関連する位相的不変量として

Kazhdan-Lusztig多項式および逆

Kazhdan-Lusztig多項式が自然に現れる。

臨界レベルでの指標を記述するものと思われていた周期的Kazhdan-Lusztig多項式は、半無限旗多様体と呼ばれる無限次元多様体の位相的不変量と関連するものである。臨界レベルにおける指標公式を幾何学的手法で証明するには、半無限旗多様体の無限次元多様体としての基礎付けおよびその上のD加群の理論を構築することは自然な方向であった。

2. 研究の目的：

臨界レベルにおける指標公式の証明を与える事である。

3. 研究の方法：

半無限旗多様体をモデルとする無限次元多様体およびその上のD加群の理論を用いて、局所化の理論を構成する。また、これと関連する、ベキ根での量子群の表現論について調べる。

4. 研究成果：

無限次元多様体の理論の構築は、進展しなかったが、ベキ根での量子群の表現論に関して、以下の事項に関する進展があった。

- (1) 量子群の局所化：局所化に関して、微分作用素環の東屋性が最も重要な問題である。奇数乗根の場合は既に以前の研究で解っていたが、偶数乗根でも同様の問題を考察した。偶数乗根の場合は量子群

の構造自体に関して未解明の点が残っているが、一番簡単なA1型量子群の場合には、具体的な計算が実行可能なので、直接扱うことが出来る。実際、この場合、偶数乗根でも東屋性が成立している事を確かめることができた。また導来圏においてBeilinson-Bernstein型定理が成り立っていることを証明した。

- (2) 偶数乗根での量子群の中心の構造：奇数乗根での量子群の中心の構造はDeConcini-Procesiにより、完全に解明されているが、偶数乗根での対応する結果は知られていなかった。実際、偶数乗根の場合の中心の構造は、奇数乗根のときに比較してずっと複雑である事が解っている。研究代表者は、ADE型で4の倍数乗根の場合に、この問題を考察し、ほぼ満足のできる結果を得た。完全な決定には、さらに可換環論的考察が必要であるが、この部分はそうむつかしくないものと思われる。また、それ以外の場合にも、計算を行い、予想を定式化した。これを示す事が今後の課題となる。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計11件)

- ① D' Agnolo, Andrea; Kashiwara, Masaki
On quantization of complex symplectic manifolds.
Comm. Math. Phys. 308 (2011), no. 1, 81-113. (査読有り)
- ② Andersen, Henning Haahr; Kaneda, Masaharu
Rigidity of tilting modules.
Mosc. Math. J. 11 (2011), no. 1, 1-39. (査読有り)
- ③ Grantcharov, Dimitar; Jung, Ji Hye; Kang, Seok-Jin; Kashiwara, Masaki; Kim, Myungho
Quantum queer superalgebra and crystal bases.
Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 86 (2010), no. 10, 177-182. (査読有り)
- ④ Kashiwara, Masaki; Vilonen, Kari
On the codimension-three conjecture.
Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 86 (2010), no. 9, 154-158. (査読有り)
- ⑤ Kashiwara, Masaki; Nakashima, Toshiki; Okado, Masato

- Tropical R maps and affine geometric crystals.
Represent. Theory 14 (2010), 446-509.
(査読有り)
- ⑥ Kang, Seok-Jin; Kashiwara, Masaki; Schiffmann, Olivier
Geometric construction of crystal bases for quantum generalized Kac-Moody algebras.
Adv. Math. 222 (2009), no. 3, 996-1015.
(査読有り)
- ⑦ Kashiwara, Masaki; Shimozono, Mark
Equivariant K-theory of affine flag manifolds and affine Grothendieck polynomials.
Duke Math. J. 148 (2009), no. 3, 501-538. (査読有り)
- ⑧ Kashiwara, Masaki; Schapira, Pierre
Modules over deformation quantization algebroids: an overview.
Lett. Math. Phys. 88 (2009), no. 1-3, 79-99. (査読有り)
- ⑨ Tanisaki, Toshiyuki
Masaki Kashiwara and representation theory.
Algebraic analysis and around, 11-18, Adv. Stud. Pure Math., 54, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2009. (査読有り)
- ⑩ Kaneda, Masaharu
On the structure of parabolic Humphreys-Verma modules.
New trends in combinatorial representation theory, 117-123, RIMS Kōkyūroku Bessatsu, B11, Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto, 2009. (査読有り)
- ⑪ Masaharu, Kaneda
The structure of Humphreys-Verma modules for projective spaces.
J. Algebra 322 (2009), no. 1, 237-244.
(査読有り)

[学会発表] (計9件)

- ① T. Tanisaki,
The center of a quantized enveloping algebra at a root of 1, Representations of Chevalley groups and related topics, 名古屋大学多元数理科学研究科, 2012.3.15
- ② T. Tanisaki
Differential operators on quantized flag manifolds,

- Perspectives in algebraic Lie theory, Isaac Newton Institute for Mathematical Sciences, Cambridge, England, 2011.9.12
- ③ 谷崎俊之,
有限W代数入門,
第14回代数群と量子群の表現論研究集会国民宿舎 小豆島, 2011.6.4, 5
- ④ 谷崎俊之,
Manin triple と量子群,
稚内代数群セミナー, 稚内北星学園大学, 2011.2.21
- ⑤ T. Tanisaki
Symplectic manifolds arising from quantized enveloping algebras,
The 5th International Conference on Representation Theory, Xian, China, 2010.8.11
- ⑥ T. Tanisaki
Differential operators on quantized flag manifolds at roots of 1,
Algebraic Analysis and Beyond 京都大学理学研究科, 2010.3.13-16
- ⑦ T. Tanisaki
D-modules on quantized flag manifolds at roots of 1,
International workshop on combinatorial and geometric approach to representation theory, Seoul National University, 2009.9.21-22
- ⑧ 谷崎俊之,
Variations on a theme of Bezrukavnikov-Mirkovic-Rumynin.
ゲーム理論と表現論稚内北星学園大学, 2009.8.24
- ⑨ T. Tanisaki
D-modules on quantized flag manifolds at roots of 1,
Workshop on Lie theory and representation theory II
中国, East China Normal University, 2009.7.20

6. 研究組織

- (1) 研究代表者
谷崎 俊之 (TANISAKI TOSHIYUKI)
大阪市立大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：70142916
- (2) 研究分担者
兼田 正治 (KANEDA MASAHARU)
大阪市立大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：60204557

(3) 連携研究者

柏原 正樹 (KASHIWARA MASAKI)
京都大学・数理解析研究所・教授
研究者番号：60027381