

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年5月13日現在

機関番号：10101

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2009 ～ 2011

課題番号：21654007

研究課題名（和文） ブレーンワールドモデルにおける事象の地平線とその特異点の研究

研究課題名（英文） Research on the singularities and the event horizon in the brane world model.

## 研究代表者

泉屋 周一（IZUMIYA SHYUICHI）

北海道大学・大学院理学研究院・教授

研究者番号：80127422

研究成果の概要（和文）：反ド・ジッター時空やミンコフスキー時空内における空間的部分多様体の幾何学的不変量の局所的性質と大域的性質の研究を推進した。その結果、ミンコフスキー時空内の空間的部分多様体の性質として、光的タイト部分多様体という概念を導入した。また、ミンコフスキー時空の限界捕捉面がグラフ型の場合に満たす偏微分方程式の記述に成功した。

研究成果の概要（英文）：We have progressed the research on local and global properties of geometric invariants for spacelike submanifolds in anti de Sitter space-time and Minkowski space-time. As a consequence, we have introduced the notion of lightlike tightness for spacelike submanifolds. We have also determined the partial differential equations for Marginally trapped surfaces of graph type in Minkowski space-time.

## 交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	1,000,000	0	1,000,000
2010年度	1,000,000	0	1,000,000
2011年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総計	3,000,000	300,000	3,300,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：ブレーン、特異点論、焦面、事象の地平線、ブラックホール

## 1. 研究開始当初の背景

反ド・ジッター空間は、ブレーン宇宙論や素粒子物理学において、単純なモデルを与えることから、主として理論物理学の立場から多くの研究が存在する。一方、ローレンツ空間形やリーマン空間形の中で、もっとも豊富な幾何学的性質をもつ空間として、純粋に数学的（幾何学的）にも興味深い対象である。この反ド・ジッター空間の部分空間を研究することは、理論物理学で研究されてきた、ブレーン宇宙モデルの幾何学的性質を明らかにし、物理モデルの性質のより深い理解の可能

性が期待される。

## 2. 研究の目的

本研究は、宇宙論や素粒子物理学に現れる、反ド・ジッター空間と呼ばれるローレンツ多様体の部分多様体の微分幾何学的性質を、特異点論を応用することによって研究することを主要な目的としている。その研究を通して、物理的な意味のみならず幾何学的に興味深い新たな不変量の発見やその性質の理解を目指すものである。

### 3. 研究の方法

部分多様体に対して、その属しているローレンツ（リーマン）空間形に対応した、高さ関数族、距離2乗関数族等の関数族を考え、その関数族に「関数族の開折理論」を適用することにより、対応する特異点を持つ図形を導入する。多くの場合、この図形の特異点もとの部分多様体の幾何学的に特徴的な点に対応しており、その特異点の退化の様子が部分多様体の新たな不変量によって記述される。このようにして得られる不変量の幾何学的（および物理的）性質を研究するために、その関数族から定まる、ルジャンドル・ラグランジュ部分多様体を求め、ルジャンドル・ラグランジュ特異点論を応用することにより、幾何学的（および物理的）意味を明らかにする。さらには、その特異点のタイプを決定する。

### 4. 研究成果

初年度は、理論物理学における、基本的文献である、ランドール等による、5次元反ドジッター空間内における2種類のブレーン宇宙モデルを数学的にいかに解釈するかについて考察した。その結果、ランドール・サンドラムモデルにおけるブレーンは、双曲空間におけるホロ超球面に対応することが理解でき、カーチ・ランドールモデルにおけるブレーンは等距離超曲面に対応することが理解された。これらの超曲面は数学的（微分幾何学的）には、全臍的な超曲面の一種で、特異点論の応用としての微分幾何学では、全臍的超曲面は幾何学的モデルと考えることができるので、理論物理におけるモデルが数学的にもモデルと考えられる空間であることが興味深い。この事実から、一般のブレーンに対する、特異点論の応用としての微分幾何学は幾何学的モデルとの近さや違いを表わす不変量（曲率）が何らかの対応する物理的意味を持つところがわかる。次に、これらの不変量を求めるために一般の時間的超曲面で余次元1の空間的部分多様体から定まる様相構造をもつもの考えた。この葉となる空間的部分多様体は全体空間内では余次元が2なので、以前にミンコフスキー空間の場合に開発した手法がこの場合にも適用される。2010年度には、より単純な場合で、特殊相対性理論の舞台である一般次元のミンコフスキー時空内の空間的部分多様体の不変量の構成とその幾何学的意味付けの研究を推進した。反ド・ジッター空間を考えるかわりにミンコフスキー時空を考えると、因果律が単純なために、より詳しい構造が理解可能となる。以前からの代表者の研究で、ミンコフスキー時空内の空間的部分多様体で余次元2の場合がユークリッド空間内の超曲面の理論に対応すると理解され、その場合の微分幾何学的不変量の構成と幾何学的意味付

けが得られている。ブレーンワールドモデルにおけるブレーンの最も単純な場合である超世界ブレーンとよばれる時間的超曲面が重要であるが、より詳しい構造として、その中の空間的な余次元1の葉層構造が付随する。この場合、各葉は全体空間の中で、余次元2となるので、現在までに得られた成果が応用可能となる。このような観点から、余次元2の空間的部分多様体の理論を精査した結果、思いがけず、限界捕捉面と言う概念に到達した。この概念は、ペンローズが示した一般的な時空内における時空の特異点の存在定理において主要な役割を担うものである。今回、この限界捕捉面の新たな解釈を与えた。その結果、この概念が、極小曲面、極大曲面、双曲空間内の平均曲率一定曲面等を統一的に扱えることの理由付けを与える事ができた。次に、2010年度までの研究成果として得られたミンコフスキー時空内の余次元2空間的部分多様体の不変量とその幾何学的意味付けにたいして、さらに余次元が高い空間的部分多様体に特異点論を応用することにより、幾何学的不変量を導き、その幾何学的性質について研究を推進してきたが、引き続き2011年度もその方針で本研究課題を推進した。特に2011年度には、それまでに考えられた枠組みの下で、得られた幾何学的不変量の全域的性質について研究した。この光錐的曲率に対して、余次元2の場合には、ガウス・ボンネ型の積分公式が成り立つことが以前の代表者の研究により知られていたが、その絶対値の積分に対するチャーン・ラーショフ型積分不等式を示した。特に、この不等式に対して等式が成立する場合の空間的部分多様体の特徴付けとして、光的タイト空間的部分多様体という概念を新たに導入して、空間的部分多様体が球面の像となる場合にその特徴付けをあたえた。その結果、ユークリッド空間内のタイト部分多様体と双曲空間内のホロタイト部分多様体の類似点や相違点を明らかにすることができた。さらに、その付属物として、一般余次元の空間的部分多様体に沿った光的超曲面の研究をするための枠組みを構成し、その特異点の幾何学的意味をルジャンドル特異点論を応用することにより明らかにした。この光的超極曲面は様々な事象の地平線の形状を記述するもので、ブラックホール物理学や宇宙論において重要な役割をになうものである。

### 5. 主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計18件）

① Shyuichi Izumiya and Handan Yildirim,

- Extensions of the mandala of Legendrian, dualities for pseudo-spheres in Lorentz Minkowski space, *Topology and its Applications* 査読有、159(2) 509–518 2012年2月  
Doi:10.1016/j.topol.2011.09.026
- ② Shyuichi Izumiya and Masatomo Takahashi, On caustics of submanifolds and canal hypersurfaces in Euclidean space, *Topology and its Applications* 査読有、159(2) 509–518 2012年2月  
Doi: 10.1016/j.topol.2011.09.025
- ③ Shyuichi Izumiya, Marcelo Buosis and Maria Aparecida Soares Ruas, Horo-tight spheres in hyperbolic space 査読有、*Geometriae Dedicata* 154(1) 9–26 2011年9月  
Doi: 10.1007/s10711-010-9565-9
- ④ Shyuichi Izumiya and Handan Yildirim, Slant geometry of spacelike hypersurfaces in the lightcone, 査読有、*Journal of Mathematical Society of Japan* 63(3) 715–752 2011年7月  
Doi: 10.2969/jmsj/06330715
- ⑤ Shyuichi Izumiya, Takayuki Nagai and Kentaro Saji, Great circular surfaces in the three-sphere, 査読有、*Differential Geometry and its Applications* 29 409–425 2011年5月  
Doi: 10.1016/j.difgeo.2011.02.005
- ⑥ Shyuichi Izumiya and Kentaro Saji, The mandala of Legendrian dualities for pseudo-spheres in Lorentz-Minkowski space and “flat” spacelike surfaces, 査読有、*Journal of Singularities* 2 92–127 2010年12月  
Doi: [10.5427/jsing.2010.2g](https://doi.org/10.5427/jsing.2010.2g)
- ⑦ Marcelo Buosi, Shyuichi Izumiya and Maria Aparecida Soares Ruas, Total absolute horospherical curvature of submanifolds in hyperbolic space, 査読有、*Advances in Geometry* 10(4) 603–620 2010年10月  
Doi:10.1515/ADVGEOM.2010.029
- ⑧ S. Izumiya, M. Takahashi and F. Tari, Folding maps on spacelike and timelike surfaces and duality, 査読有、*Osaka Journal of Mathematics* 47 839–862 2010年9月  
<http://projecteuclid.org/DPubS?service=UI&version=1.0&verb=Display&page=toc&handle=euclid.ojm/1285334467>
- ⑨ S. Izumiya, K. Saji and M. Takahashi, Horospherical flat surfaces in Hyperbolic 3-space, 査読有、*Journal of Mathematical Society of Japan* 62(3) 789–849 2010年7月  
Doi: 10.2969/jmsj/06230789
- ⑩ S. Izumiya and F. Tari, Self-adjoint operators on surfaces with singular metrics, 査読有、*Journal of Dynamical and Control Systems* 16(3) 329–353 2010年7月  
Doi: 10.1007/s10883-010-9096-6
- ⑪ Liang Chen and Shyuichi Izumiya, Singularities of Anti de Sitter torus Gauss maps, 査読有、*Bulletin of Brazilian Mathematical Society* 41(1) 37–61 2010年  
<http://www.springerlink.com/content/e617n7x3k947w175/>
- ⑫ Shyuichi Izumiya, Juan Jose Nuno Ballesteros and Maria del Carmen Romero Fuster, Global properties of codimension two spacelike submanifolds in Minkowski space, 査読有、*Advances in Geometry* 10 51–75 2010年  
Doi: 10.1515/ADVGEOM.2009.034
- ⑬ Shyuichi Izumiya and Farid Tari, Projections of surfaces in the hyperbolic space along horocycles, 査読有、*Proceedings of the Royal Society of Edinburgh* 140A 399–418 2010年
- ⑭ Sachiko Chino and Shyuichi Izumiya, Lightlike developables in Minkowski 3-space, 査読有、*Demonstratio Mathematica* XLIII(2) 387–399 2010年  
<http://www.ams.org/distribution/mmj/vol9-2-2009/cont9-2-2009.html>
- ⑮ Shyuichi Izumiya, Legendrian dualities and spacelike hypersurfaces in the lightcone, 査読有、*Moscow Mathematical Journal* 9(2) 325–357 2009年4月  
<http://www.ams.org/distribution/mmj/vol9-2-2009/cont9-2-2009.html>
- ⑯ Shyuichi Izumiya, Donghe Pei and Maria del Carmen Romero Fuster, Spacelike surfaces in Anti de Sitter Four-Space from a Contact Viewpoint, 査読有、*Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics* 267 156–173 2009年  
Doi: 10.1134/S0081543809040130
- ⑰ Shyuichi Izumiya, Maria del Carmen Romero Fuster and Kentaro Saji, Flat lightlike hypersurfaces in Lorentz-Minkowski 4-space, 査読有、*Journal of Geometry and Physics* 59 1528–1546 2009年  
10.1016/j.geomphys.2009.07.017
- ⑱ Shyuichi Izumiya, Horospherical geometry in the hyperbolic space, 査読有、*Advanced Studies in Pure Mathematics* 55 31–49 2009年

〔学会発表〕（計 5 件）

- ① 泉屋周一、ミンコフスキー時空内の限界捕捉面、特異点論とその応用 2011 年 6 月 2 日、大分高専
- ② Shyuichi Izumiya, The lightlike geometry of spacelike submanifolds in Lorentz-Minkowski space, Differential Geometry and Tanaka Theory 2011 年 1 月 26 日、京都大学
- ③ Shyuichi Izumiya, Singularities of Gauss maps; revisited, 11th International Workshop on Real and Complex Singularities 2010 年 7 月 30 日, Sao Paulo University (Sao Carlos, Brazil)
- ④ Shyuichi Izumiya, Singularities of caustics emitted by timelike hypersurfaces in Anti de Sitter space, JSPS forum Singularities and Applications, Strasbourg 2009 年 8 月 25 日, Strasbourg University (France)
- ⑤ S. Izumiya and M. Ruas, Differential Geometry from the view point of Singularity Theory, 1st Workshop on Singularities in Generic Geometry and Applications (Valencia) 2009 年 3 月 24, 25, 26 日 Valencia University (Spain)

〔図書〕（計 0 件）

〔産業財産権〕

○出願状況（計 0 件）

○取得状況（計 0 件）

〔その他〕

ホームページ等

<http://researchmap.jp/izumiya/>

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

泉屋 周一 (IZUMIYA SHYUICHI)  
北海道大学・大学院理学研究院・教授  
研究者番号：80127422

### (2) 研究分担者

なし

### (3) 連携研究者

なし