

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年 5月 1日現在

機関番号：12601

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2009～2011

課題番号：21654009

研究課題名（和文） 無限単純群の幾何的研究

研究課題名（英文） Geometric study on infinite simple groups

研究代表者

坪井 俊 (TSUBOI Takashi)

東京大学・大学院数理科学研究科・教授

研究者番号：40114566

研究成果の概要（和文）：

群から実数へのいろいろな擬準同型、群の共役類集合上の距離 d などを用いて、様々な無限単純群を幾何的対象として研究した。特に、無限交代群 A_∞ 上の距離 d をほぼ決定した。良い円周作用を持つ多様体の実解析的微分同相群の恒等写像の連結成分は完全群であることを示し出版した。2次元、4次元以外の閉多様体の微分同相群の恒等写像の連結成分は、一様完全、一様単純であることを示し、出版した。交換子幅1の同相群について研究した。

研究成果の概要（英文）：

We studied infinite simple groups as geometric objects where they have various quasimorphisms and the distance function d on the set of unions of a conjugate class and its inverse. We determined the quasi isometry type with respect to the distance d of the infinite alternative group A_∞ . We showed and published the result that the identity component of the group of real analytic diffeomorphisms of a manifold with good circle actions is perfect. We showed and published the result that the identity component of the group of diffeomorphisms of a closed connected manifold of dimensions not equal to 2 and 4 is uniformly perfect and uniformly simple. We also studied the homeomorphism groups of commutator width one.

交付決定額

(金額単位：円)

| | 直接経費 | 間接経費 | 合計 |
|--------|-----------|---------|-----------|
| 2009年度 | 1,000,000 | 0 | 1,000,000 |
| 2010年度 | 1,000,000 | 0 | 1,000,000 |
| 2011年度 | 1,000,000 | 300,000 | 1,300,000 |
| 年度 | | | |
| 年度 | | | |
| 総計 | 3,000,000 | 300,000 | 3,300,000 |

研究分野： 数学

科研費の分科・細目： 数学・幾何学

キーワード： 無限単純群, 微分同相群, 完全群, 幾何学的群論, 幾何学, トポロジー, 代数学

1. 研究開始当初の背景

無限群を研究する標準的な方法のひとつは、その群からよくわかる別の群への準同型を作ることであるが、微分同相群の恒等写像成分、メンガー空間の同相群など申請者が研

究してきた無限変換群は、単純群であり、別の群に非自明な準同型を作ることはできない。また、無限群の部分群を調べることも標準的である。これは、群のホモロジー群の計算と直接関係がある。群のホモロジー群が非

自明であることを示すためには、コホモロジー類を定義し、非自明なサイクルを構成することになり、葉層構造の特性類の理論とも関係して40年近くの研究がなされているが、新しい特性類の探求、非自明性を示すサイクルの構成も難問として残されている。一方で、さまざまな同相群は、アサイクリックであることが示され、すべてのホモロジー群が自明となる。

このようなアサイクリックな無限単純群に対しても有効な群の幾何的研究をおこなうことが必要となる。完全群に対して、群から実数への擬準同型 **quasimorphism** が幾何的に定義され、重要な研究が Gromov, Ghys, Bavard, Polterovich, Calegari, 藤原たちによってなされてきた。

申請者は、最近の研究の中で、単純群の単位元以外の元 g に対して、 g と g^{-1} の共役類の和集合 C_g を考え、集合 $\{C_g \mid g \in G\}$ 上に次の距離を定義した。

$$d(C_{g_1}, C_{g_2}) = \log \min \{k \mid g_1 \in (C_{g_2})^k, g_2 \in (C_{g_1})^k\}$$

この距離の性質は非常に興味深く、様々な擬準同型との関連を含め、無限単純群の幾何的研究をおこなうことが非常に重要となってきた。

2. 研究の目的

この研究では、群から実数へのいろいろな擬準同型、申請者が最近定義した群の共役類集合上の距離 d などを用いて、様々な無限単純群を幾何的対象として研究する。いろいろな擬準同型との関係、共役類の集合上の距離の性質を明らかにすることにより、様々な無限単純群の「形」を理解することが、研究目的である。特に、無限交代群 A_∞ 、様々な微分同相群、Thompson 型の有限表示無限単純群などについてのそれらの無限単純群の「形」を理解する。群の元の共役類に対して、その台の大きさが定義できるときには、 d の評価式が得られるが、そのような共役不変量との関係を明らかにする。

3. 研究の方法

研究代表者は単純群 G の単位元以外の元 g に対して、 g と g^{-1} の共役類の和集合 C_g を考え、集合 $\{C_g \mid g \in G\}$ 上に次の距離を定義した。

$$d(C_{g_1}, C_{g_2}) = \log \min \{k \mid g_1 \in (C_{g_2})^k, g_2 \in (C_{g_1})^k\}$$

この距離 d に関係づけながら、これまでに知られている擬準同型、群の有界コホモロジー、群の上の擬ノルム、群の元の交換子長、安定交換子長などとともに、単純群の幾何についての研究を進め、様々な単純群の「形」を理解していく。特に、以下の点について研究を実施する。

(1) $d(C_{g_1}, C_{g_2})$ についての基本的な性質を整理する。

(2) 無限交代群 $A_\infty = \lim A_n$ に対して、距離 $d(g_1, g_2)$ を決定する。

(3) 安定交換子長、擬準同型と距離 d の関係を研究する。

(4) 有限生成無限単純群に対して研究を行う。

(5) 微分同相群の恒等写像成分についての研究を行う。

(6) 微分可能性を仮定しない同相群に対して研究を行う。

(7) 体積を保つ微分同相群、シンプレクティック微分同相群、ハミルトン微分同相群について、元の台、部分集合の移動可能性について整理する。

(8) 本研究は、個人研究として行うが、

(1) — (7) の研究を遂行するために、幾何学的群論、微分同相群、シンプレクティック幾何などの研究者と情報の交換をおこなう。若手の研究者に対しては、この研究の重要な点をわかりやすい形で説明するセミナーを行い、双方の研究に役立てる

(9) 研究交流をさらに円滑に行なうため、研究経過等を随時ウェブページに公表する。また、本研究の研究成果は随時国内国外で発表する。

4. 研究成果

単純群 G に対し定義した集合 $\{C_g \mid g \in G\}$ 上の距離 d について、松田能文、児玉大樹らと研究し、 $d(C_{g_1}, C_{g_2})$ についての基本的な性質を整理し、無限交代群 $A_\infty = \lim A_n$ に対して、距離 $d(g_1, g_2)$ をほぼ決定した。さらにその拡張について検討した。特に、共役類の台の大きさが定義されるときには、それが距離の非自明性についての第1の手がかりであることが分かった。

2009年にはグルノーブル大学の Sergiescu 氏を招き、Thompson 型の有限表示無限単純群について研究した。2010年7月に「トポロジーと確率論の諸相 2010」研究集会を開催し、情報の収集につとめた。群の上での確率論的手法の応用について検討した。2011年10月に「多様体の平面場と微分同相群 2011 研究集会」(Plane Fields on Manifolds and Diffeomorphisms Groups 2011)を開催し、情報の収集につとめた。

2009年には、円周束構造を持つ多様体および円周の特殊半自由作用を持つ多様体、円周作用を持つ2次元、3次元の多様体に対して、実解析的微分同相群の恒等写像の連結成分の群は完全群であることを示し出版した。また、2009年に次の2つの結果を出版した。中間指数 n のハンドルを持たないハンドル分解を持つ偶数次元閉多様体 M^{2n} の微分同相群 $\text{Diff}^r(M^{2n})$ ($r \neq$

$2n+1$)の恒等写像の成分 $\text{Diff}^r(M^{2n})_0$ は一様単純群である。すなわち、 $\text{Diff}^r(M^{2n})_0$ の任意の恒等写像でない元 f に対し、任意の元 g は、 f, f^{-1} の $32n+8$ 個の共役の積で書かれる。奇数次元閉多様体 M^{2n+1} の微分同相群 $\text{Diff}^r(M^{2n+1})$ ($r \neq 2n+2$) の恒等写像の成分 $\text{Diff}^r(M^{2n+1})_0$ は一様単純群である。すなわち、 $\text{Diff}^r(M^{2n+1})_0$ の任意の恒等写像でない元 f に対し、任意の元 g は、 f, f^{-1} の $32n+44$ 個の共役の積で書かれる。

2011年度には6次元以上の偶数次元閉多様体 M^{2n} の微分同相群 $\text{Diff}^r(M^{2n})$ ($r \neq 2n+1$) の恒等写像の成分 $\text{Diff}^r(M^{2n})_0$ は、一様完全であることおよび多様体が連結ならば一様単純であることを示した。この場合、多様体により、交換子積長の最大値、あるいは1つの元を非自明な他の元とその逆元の共役の積で書くための共役の個数は多様体に依存する可能性がある。この結果の証明の整備のために、モース関数と胞体分割の関係について詳しく研究した。なお、この結果により、閉多様体の一様完全性の問題は2次元多様体、4次元多様体を除いて解決された。

2011年には、任意の次元の球面の向きを保つ同相群、任意の次元のメンガーコンパクト空間の同相群に対し、任意の元はただ1つの交換子に書かれることを示し、これをいくつかの研究集会で発表した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 4 件)

1. Takashi Tsuboi: On the uniform perfectness of the groups of diffeomorphisms of even-dimensional manifolds, *Commentarii Mathematici Helvetici* 87, (2012) 141-185. 査読有 DOI: 10.4171/CMH/251
2. Takashi Tsuboi: On the uniform simplicity of diffeomorphism groups, *Differential Geometry, Proceedings of the VIII International Colloquium*, Santiago de Compostela, 2008, World Scientific, Singapore (2009) 43-55. 査読有
3. Takashi Tsuboi: On the group of real analytic diffeomorphisms, *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure*, 49, (2009) 601-651. 査読有
4. Takashi Tsuboi: Classifying spaces for

groupoid structures, *Foliations, Geometry, and Topology: Paul Schweitzer Festschrift, Contemporary Mathematics* 498 (2009) 67-81. 査読有

[学会発表] (計 3 件)

1. Takashi TSUBOI: Homeomorphism groups of commutator width one, Poster at Geometry and Dynamics, Todai Forum, Ecole Normale Supérieure de Lyon, France, 2011 年 10 月 17 日.
2. Takashi TSUBOI: On the uniform perfectness of the group of diffeomorphisms, *Centro de Recerca Matematica*, Barcelona, Spain, 2010 年 7 月 13 日.
3. 坪井 俊: $\text{Diff}^\omega(\mathbb{C}P^2)_0$, 「複素解析的ベクトル場・葉層構造とその周辺」研究集会, 龍谷大学セミナーハウスともいき荘, 2009 年 12 月 13 日.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

坪井 俊 (TSUBOI Takashi)
 東京大学・大学院数理学研究科・教授
 研究者番号: 40114566

(2) 研究分担者

()

研究者番号:

(3) 連携研究者

()

研究者番号: