

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年 5月24日現在

機関番号：17102

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2009～2011

課題番号：21654012

研究課題名（和文） A_∞ 代数による空間のホモトピー代数モデルの構築

研究課題名（英文） Toward Homotopy-Algebra Model using A-infinity Algebra

研究代表者

岩瀬 則夫 (IWASE NORIO)

九州大学・数理学研究院・教授

研究者番号：60213287

研究成果の概要（和文）：

空間に対する A_∞ 構造の定義は、実は2種類存在し、両者ともが J. D. Stasheff によるものである。一方は厳密な単位元の存在を要請するのにも関わらず、他方はホモトピー単位元しか必要としない。これに対して、ホモトピー単位元を持つ A_∞ 空間が、別の厳密な単位元を持つ A_∞ 空間にホモトピー同値となるという意味でこの問題に決着を付けられた。さらに、two-sided Borel construction を A_∞ 作用の場合に拡張し、通常的作用をホモトピー的に変形しても A_∞ 作用の意味で全くコホモロジー論的な扱いに違いが生じないことを見いだした。

研究成果の概要（英文）：

There are two different definitions of A_∞ structures on a space, both are introduced by J. D. Stasheff. One requires a strict unit and the other requires only a homotopy unit. We give a proof for that an A_∞ space with homotopy unit is homotopy equivalent to an A_∞ space with strict unit. We also give a definition of a two-sided Borel construction for A_∞ actions, which must imply that no cohomological difference shall appear after deforming a true action as A_∞ action.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	600,000	0	600,000
2010年度	500,000	0	500,000
2011年度	600,000	180,000	780,000
年度			
年度			
総計	1,700,000	180,000	1,880,000

研究分野：数学

科研費の分科・細目：幾何学

キーワード： A_∞ 代数, ホモトピー代数, A_∞ 圏, 微分次数付き余代数, 二重バー構成, 単位元, ホモトピー作用

1. 研究開始当初の背景

幾何学的対象のホモトピー論的性質に対して、これまで多くの計算可能な不変量が作ら

れ、それらが様々な位相的ないしホモトピー論的性質をある程度はコントロールできる事が示されてきた。例えば C^∞ 関数の特異点の個数の下限は微分位相不変量であり、そ

のホモトピー論的近似となるホモトピー不変量である L-S カテゴリ数は、それ自体は計算可能ではなく計算可能な他の不変量によって決定される。

これまでのところ、申請者と京大の河野明氏による module weight がその下限を与える最良の計算可能な不変量となっているが、これとても残念ながら完全ではない。すなわち、L-S カテゴリ数を完全に決定する計算可能な不変量は知られていない。

ところが2005年の Max-Planck 研究所主催の国際会議や2007年の Banach Center 主催の国際会議に申請者が招待されたおりに、最近の May-Mandel の理論の進展に触れる機会を持った。そこでは米国の May による E_∞ operad を用いた安定コホモロジー論の特徴づけは大きな成功を収め、会議においても cacti operad などの PROP の手法は注目を集めていた。

その一方で、やはり Mandel が中心となって E_∞ operad の作用を元に、非安定ホモトピー論への応用が与えられている。こうした時点において申請者がこの新しい流れに非安定ホモトピー論の新たな観点をもち込むことで、日本の研究者を中心とした流れを創出できる可能性があると考えられた。

2. 研究の目的

ループ空間の mod p 鎖複体は E_∞ 余代数のなす圏における A_∞ 代数となるか？ ループ空間の mod p 鎖複体の Bar 構成は、元の CW 複体の mod p 余鎖複体と同値か？ 単連結 CW 複体の mod p 余鎖複体は E_∞ 余代数として、 A_∞ 代数であるそのループ空間の mod p 鎖複体の Bar 構成に付随したフィルター付きの E_∞ 余代数となるか？ と言った問題に対する答えを得たい。

その為に、まず、位相空間の mod p L-S カテゴリ数を (コ)チェーン複体の代数的不変量により記述することを目標とする。

3. 研究の方法

まず E_∞ 代数の理論を研究し、特にその圏論的な枠組みについて国内外の専門家と特に以下の点について一つ一つ確認し、検討する作業をしなければならない。一つは May や Mandell により創始され、米国と欧州を中心に発展し続けている E_∞ operad の理論の双対化であり、現在まで mod p 余鎖複体に対して構築されている E_∞ 代数の理論から mod p 鎖複体に対する E_∞ 余代数の理論を形成することであり、単連結位相空間の p-type と mod p 鎖複体の E_∞ 余代数構造の対応付けを与えることが必要である。

次に E_∞ 余代数の理論の圏論的な枠組み

について検討する作業を行い、 A_∞ 代数に対する Bar 構成を深谷の意味の A_∞ 圏に対するホモトピー的な意味での nerve 構成として与える為に、それらすべてに圏論的な意味付けを与える試みを展開することで、ループ空間に付随する射影空間の圏論的枠組みにおける代数的モデルを構築する。これにより A_∞ 代数と mod p L-S カテゴリ数との繋がりを探求する。さらに A_∞ 代数に対する Bar 構成を深谷の意味の A_∞ 圏に対するホモトピー的な意味での nerve 構成として与える為に、それらすべてに圏論的な意味付けを与える試みを展開する。

さらに A_∞ 代数と mod p バージョンの L-S カテゴリ数の繋がりを探求する。位相空間のレベルではこれらの関係は申請者により既に得られており、その結果、下から評価する新しい不変量 module weight や上から評価する新しい不変量 categorical length などが得られている。これを代数的あるいは圏論的なレベルで再構成するのが本研究の最終的な目標となる。その結果として Ganea の強い猫が代数的な不変量として記述できれば、全く不透明であった C^∞ -関数の零点の下限と Ganea の強い猫との関連にも新しい進展が得られることが期待されるものである。

またここまでする実行できたとするならば、この先にあると考える新 Ganea 予想への道順については、有理ホモトピー論における次の事実注目したいと考えている。「Ganea の有理強 L-S カテゴリ数が有理モデルのベキ零指数と一致する。」このアナロジーとして E_∞ 余代数のなす圏における何らかの代数モデルのベキ零指数の定式化を行うことでベキ零指数による mod p 強 L-S カテゴリ数の特徴づけが行えるようになると考えている。これにより Ganea の mod p 強 L-S カテゴリ数の代数的な定義に到達する道筋が見えてくるものと期待するものである。

4. 研究成果

空間に対する A_∞ 構造の定義は、実は2種類存在し、両者ともが J.D. Stasheff によるものである。これら二つの定義の存在が本研究の進行に対する大きな足かせとなっていた。その定義の一方は厳密な単位元の存在を要請するのにも関わらず、他方はホモトピー単位元しか必要としないというものである。

ところが、Stasheff によるそれらの同値性の証明には重大なギャップがあることが専門家の間では認識されていた。そのギャップを埋める努力は十分には成されて来たとは言えないが、この二つの定義は実際に同値であると固く信じられてきた。これに対して、

Stasheff の主張するような形での証明とは全く異なる方法を用いて、ホモトピー単位元を持つ A_∞ 空間が、別の厳密な単位元を持つ A_∞ 空間にホモトピー同値となるという意味でこの問題に決着を付けられた。これにより本研究で採用すべき定義に一つの方向性が与えられたことになる。

これらの事実を証明する為に、Stasheff による cell の非常に具体的な構成を行い、さらにこれと Boardman-Vogt 流の cell との比較を行った。そこには予測していなかった具体的で非常に綺麗な対応関係が見つかった。

また我々の定義による A_∞ 代数や A_∞ 圏の構造は Fukaya らによるものと僅かに異なり、我々の定義が強い条件であることも示される。しかしながら、そのことから例えば二つの A_∞ 代数のテンソル積がまた A_∞ 代数であることは殆ど自明のこととなることも付記したい。

さらに、 A_∞ 右作用を持つ空間と A_∞ 左作用を持つ空間の二つを取ったとき、これらに対して同時にその A_∞ 作用の分類空間を構成することができる。これは通常の右作用と左作用とに対して同時に構成される two-sided Borel construction を A_∞ 作用の場合に拡張したものである。これによって、通常的作用をホモトピー的に変形しても A_∞ 作用の意味で全くホモトピー論的な扱いに支障がないことが分かった。

これらのすべてを内部圏の一般化としての A_∞ 圏に対して定式化することに成功したと考えている。このアイデアを現在まとめつつある 70 頁ほどの論文原稿の中で、与えることを考えている。これによって本研究を進める際に障害となった事柄がかなりの程度に除去可能になったと考えている。

さらに、分類空間の性質を示す為には、これらに付随して定まるスペクトル系列を考察する必要があると考えている。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 4 件)

[1] Norio Iwase: Categorical length, relative L-S category and higher Hopf invariants, In: "Algebraic Topology: Old and New" (Bedlewo, 2007), 85 (2009), 205-224.

[2] Norio Iwase, Michihiro Sakai: Topological complexity is a fibrewise L-S category, *Topology and its Applications*, 157 (2010), 10-21

[3] Norio Iwase, Mamoru Mimura, Nobuyuki Oda, Yeon Soo Yoon: The Milnor-Stasheff Filtration on Spaces and Generalized Cyclic Maps, *Canadian Mathematical Bulletin*, (2011), published electronically.

[4] Norio Iwase, Michihiro Sakai: Erratum to "Topological Complexity is a Fibrewise L-S Category", *Topology and its Applications*, 159 (2012), 2810-2813.

[学会発表] (計 9 件)

[1] Norio Iwase: Topological Complexity and C^k -structure, at "3rd East-Asian Conference on Algebraic Topology", 2009年12月15日, (Hanoi 大学, ベトナム)

[2] Norio Iwase: Classifying space of an A_∞ action, at "Group Actions in Topology and Analysis - 4th GAF Conference", 2010年9月14日, (Università degli Studi di Milano-Bicocca, イタリア)

[3] Norio Iwase: Two-sided Bar construction for A_∞ actions of an internal A_∞ category, at "Aberdeen Topology Seminar", 2010年9月20日, (University of Aberdeen, 連合王国)

[4] Norio Iwase: A_∞ 構造の単位元について, at "非安定ホモトピー論 指宿集会", 2011年3月16日, (指宿市民会館, 指宿市)

[5] Norio Iwase: Topological complexity and L-S category, at "応用トポロジー: 情報通信・生命科学との連携を目指して", 2011年9月1日, (福岡県, JR博多シティー)

[6] Norio Iwase: Internal A_∞ category and its realization, at "福岡ホモトピー論セミナー", 2012年1月7日, (福岡県, 福岡大学セミナーハウス)

[7] Norio Iwase: Topological complexity and L-S category, at "Seminar at Universidad de Santiago de Compostela", 2012年2月16日, (Santiago de Compostela, スペイン)

[8] Norio Iwase: On the equivariant systolic category, at "New Insights in Lusternik Schnirelmann category", 2012年2月17日, (Hostal de los Reyes Catolicos, in Plaza del Obradoiro, スペイン)

[9] Norio Iwase: A_∞ category and its realization, at "Seminar at Universitat Autòn

oma de Barcelona”, 2012年2月24日, (Barcelona, スペイン)

[その他]
ホームページ等
<http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~iwase/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

岩瀬 則夫 (IWASE NORIO)
九州大学 数理学研究院 教授
研究者番号：60213287

(2) 研究分担者

()

研究者番号：

(3) 連携研究者

()

研究者番号：