

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年 5月 13日現在

機関番号：17102

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2009～2011

課題番号：21654019

研究課題名（和文） 分岐点近傍における界面方程式とその応用

研究課題名（英文） Interfacial equations near a bifurcation point and the applications

研究代表者

栄 伸一郎 (EI SHIN-ICHIRO)

九州大学・マス・フォア・インダストリ研究所・教授

研究者番号：30201362

研究成果の概要（和文）：

分岐点近傍を考察することにより構成した速度の遅いパルスを、さまざまな形状の領域上を運動させることにより、領域の幾何的性質がパルスの運動に与える影響を調べた。具体的には、滑らかな境界に沿って運動するパルス、細い領域上を運動するパルス、および不均一な媒質内を運動するパルスなどを考察対象とし、運動を記述する方程式を抜き出すための一般的手法の開発と、それを個々の問題に応用し、具体的に運動の抽出と解析を行った。

研究成果の概要（英文）：

By considering the neighborhood of a bifurcation point, we dealt with pulses with slow velocities and investigated the effects of geometrical properties of domains on pulse motions. In fact, general methods to derive the equations of motions were established and they were applied to problems of moving pulses along boundaries, in thin domains and on inhomogeneous media.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	900000	0	900000
2010年度	900000	0	900000
2011年度	900000	270000	1170000
年度			
年度			
総計	2700000	270000	2970000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学，数学一般(含確率論・統計数学)

キーワード：自己組織化，反応拡散方程式系

1. 研究開始当初の背景

反応拡散方程式系の中にはスパイラル状のパターンを有し回転運動する解を持つものがある。これはある種の酸化還元反応系において観察される現象に対応すると考えられており、実際、化学実験や数値シミュレーション等を通してその妥当性が検証されてきた。スパイラルパターンにはその回転運動の中心となる部分、一般にスパイラルコアと呼ばれている部分があり、コアの周期的回転運動や倍周期運動、迷走的運動などコアそのものの運動に関しても興味深い結果が多く報告されてきた。そうしたコアの運動を理論的に解析するために、これまで様々な方法が試みられてきた。しかしその大半はコアの運動を円周上に制限したり、コアにおける力の関係を付加したりするなど、物理的な(人為的な)条件を新たに付加することにより解析が行われてきており、コアに新たな条件を課することなく、反応拡散方程式系から直接自然な形でコアの運動が導出されることはなかった。当研究課題では、特に新たな仮定を置かず、反応拡散方程式系から自然な形でコアの運動を導出することを目指した。そのために、特に分岐点近傍を考慮することにより、コア部分を含む形で界面方程式を導出し、その界面方程式を通してスパイラルパターン全体を解析するという方法をとることにした。

2. 研究の目的

スパイラルパターンのコアの運動を付加的条件を課さずに、元の反応拡散系から直接導出するために、特にドリフト分岐点近傍を考察することにより、コア部分を含む形で界面方程式を導出することを目的とした。分岐点近傍で界面方程式を考察するという研究はこれまでなされておらず、そのための新たな解析手法の開発も目指すこととした。また、導出された界面方程式を様々な角度から検証するために、その数値シミュレーションを行うための数値スキームの考察も目的の一つとした。さらに導出された界面方程式は解の存在など、その数学的妥当性も明らかではなく、粘性解理論との関連など、数学的側面からのアプローチも重要と考えた。最後に、導出された界面方程式からコアの運動を抜き出すことにより、これまで知られているコアの様々な運動、回転運動の角速度や回転半径の導出、さらに迷走的運動に対して理論的枠組みを構築することを目指した。

3. 研究の方法

2次元スパイラルパターンは、その断面

が1次元問題の進行するフロント解とバックするフロント解により構成されていると見なされる。そこで特に分岐点近傍を考慮することにより、フロント解とバックフロント解を同時に含む形で中心多様体を構成し、それを界面に沿って貼り合わせるという手法をとることにより、コア部分を自然な形で含む界面方程式を導出することを試みた。また、導出された界面方程式は、界面としての曲線と界面上の時間発展方程式との連立系となっており、その数値シミュレーション方法も明らかではなかった。そこで等高線法を用い、計算領域を2次元領域全体に拡張することによりシミュレーションを行ったが、効率も精度も悪く新たな計算スキームの開発を必要とした。さらに導出された界面方程式に対して、解の適切性など数学的性質も不明であったため、界面部分に関しては粘性解理論を、界面上の放物型方程式に対しては、等高線法を用い定義域を拡張することにより解の存在証明を試みることにした。最後に、導出された界面方程式からコア運動を抜き出すために、コア近傍において時・空間スケールを変更し、内部問題と外部問題に分け特異摂動理論を適用することで、コア近傍の定常的運動のある種の楕円型問題の可解条件に帰着するという方法をとった。コアの迷走的運動など定常的でない運動に関しては、その発生メカニズムを定常的運動からの分岐としてとらえる試みをした。

4. 研究成果

上記方法により、少なくとも界面方程式を形式的に導出することができた。また、その界面方程式の解析によりコア部分の定常的円運動に対して角速度や回転半径を理論的に示すとともに、数値シミュレーションにより、そうした運動を再現することができた。しかし、その理論的扱いに関しては依然不明瞭な箇所が多々あり、未解決部分が残る結果となった。原因の一つとして、界面方程式を導出する際に生じた、時・空間スケールの両立しない箇所の存在をあげることができる。これはスケールを変えることにより分離した内部問題と外部問題の接合箇所において、界面の成長速度に不一致が生じるというものであり、現時点では、外部問題からの情報のみを採用することにより、上述の角速度や回転半径を導出している。分岐点近傍においてスパイラルパターンのコア運動を考察した結果がこれまでないことから、得られた結果と既存の結果との照合ができておらず、もっぱら数値シミュレーションによる検証を試みたが、導出された界面方程式に対する数値シミュレーションスキーム自身が確立しておらず、数

値計算による確証には至っていない。さらに数学的妥当性に関しても、粘性解理論などの既存の理論が全く使えない状況であったため、この点に関してもさしたる進展はなかった。以上、スパイラルパターンのコア運動を考察するという当初の目的に対して、コア部分を含む界面方程式の導出とコアの定常運動の理論的解析、およびその数値シミュレーションによる再現といった成果を得たわけであるが、これはまだ初期段階であり、ようやく第1歩を踏み出すことができたといえる状況である。多々ある未解決部分を修正し、より完全な界面方程式を導出することや、それらを解析するための数学理論の構築や数値シミュレーションのための有効な数値計算スキームの開発が喫緊の課題といえる。一方、ここまでに試みられてきた手法は他の多くの重要な問題に適用され、種々の結果を得るに至った。実際、分岐点近傍で構成した中心多様体を用いることにより、領域の幾何的性質がパルスの運動にどのように反映するかを陽に書き下すことができ、様々な領域に対してその影響を調べることに成功した。具体的には、滑らかな境界に沿って運動する尖塔状形状を持つパルスに対して、その運動は領域境界の曲率の勾配に比例すること、およびその結果として曲率の極大点において安定定常パルスが生じることを示すことができた。これはこれまで定常パルスに対して得られていた結果をダイナミクスの観点から完全に包含する結果となった。また、細い領域上を運動するパルスに対しては、その中心線の曲率がパルス運動に大きな影響を与えており、特に曲がりの急な部分、すなわち曲率の大きな箇所ではパルスは通過しにくく、時には反射して逆向きに伝搬する可能性のあることを示すことができた。これは実際の神経軸で神経パルスが軸索の曲がり具合に影響を受けていることを示唆するものであり、生物学的にも興味深い結果を与えている。さらに、不均一な媒質内を運動するパルスに対して、媒質の状態が変化する境界においてパルス運動が大きな影響を受けることを示した。その結果として、細い領域内のパルス運動と同様、そのような媒質の境目では、パルスの伝搬方向が逆転しうることも示すことができた。最後に、今回の研究課題において用いられた最も特徴的な手法の一つに、分岐点近傍において構成した中心多様体を界面に沿って貼り合わせるというものがあった。この手法は、無限に長い2次元シリンダー領域において、その両無限遠方において異なるパターンを有する解の構成に大いに役だったことを報告しておく。これは生物の表皮模様としてストライプ状のパターンが生じるメカニズ

ムを理論的に示す結果として興味深い。こうした問題に対しては、これまで定常問題に対して様々な研究結果が報告されていたが、当手法を適用することにより、時間発展の解をとらえることに成功した。以上、当研究期間内に課題の完全な解決には至らなかったが、そこで得られた手法や理論は他の多くの問題に適用され、新たな知見を生むことができたことを報告しておく。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 12 件)

- ① S.-I. Ei, H. Izuhara and M. Mimura, Infinite dimensional relaxation oscillation in a population growth model with two-mode random walking, to appear in Discrete and Continuous Dynamical Systems, Series B 17. 査読あり
- ② S.-I. Ei and T. Ishimoto, Dynamics and their interaction of spikes on smoothly curved boundaries for reaction-diffusion systems in 2D, to appear in JJIAM. 査読あり
- ③ S.-I. Ei, Dynamics of pulses on a thin strip-like domain in \mathbb{R}^2 to appear in RIMS Kokyuroku Bessatsu. 査読あり
- ④ Shin-Ichiro Ei, Kota Ikeda and Yasuhiro Miyamoto, Dynamics of a boundary spike for the shadow Gierer-Meinhardt system, Commun. Pure Appl. Anal. 査読あり 11 (2012), no. 1, 115-145.
- ⑤ Shin-Ichiro Ei and Kunishige Ohgane, A new treatment for periodic solutions and coupled oscillators, Kyushu J. Mathematics 査読あり vol. 65 No. 2 (2011), 197-217.
- ⑥ Chao-Nien Chen, Shin-Ichiro Ei, Ya-Ping Lin and Shin-Yin Kung, Standing Waves Joining with Turing Patterns in FitzHugh-Nagumo Type Systems, Communications in Partial Differential Equations, 査読あり 36 (2011), 1-18.
- ⑦ Chao-Nien Chen, Shin-Ichiro Ei and Ya-Ping Lin, Turing Patterns and Wavefronts for Reaction-Diffusion systems in an Infinite Channels, SIAM J. Appl. Math. 査読あり 70 No. 8 (2010), 2822-2843.
- ⑧ H. Ikeda and S.-I. Ei, Front dynamics in heterogeneous diffusive media, Physica D 査読あり 239 (2010), 1637-1649.
- ⑨ S.-I. Ei and H. Matsuzawa, The motion of a transition layer for a bistable reaction diffusion equation with

heterogeneous environment, DCDS 査読あり
vol. 26, number 3, March (2010), 901-921.

⑩ S.-I. Ei and T. Tsujikawa, The dynamics
of weakly interacting fronts in an
adsorbate-induced phase transition model,
Kybernetika (Prague) 査読あり 45 (2009),
no. 4, 625--633.

⑪ Shin-Ichiro Ei, Yasumasa Nishiura,
Kei-Ichi Ueda, Pulse dynamics for
reaction-diffusion systems in the
neighborhood of codimension two
singularity, J. of Math. for Industry 査
読あり vol. 1 (2009), 91-95.

[学会発表] (計 20 件)

① 栄 伸一郎, Dynamics of pulses in two
dimensional thin domain, The 3rd Kyushu
University-POSTECH Joint Workshop -
Partial Differential Equations and Fluid
Dynamics, June 16 2011, POSTEC,
Korea.

② 栄 伸一郎, Infinite dimensional
relaxation oscillation, LOCALIZED
MULTI-DIMENSIONAL PATTERNS IN
DISSIPATIVE SYSTEMS: THEORY,
MODELING, AND EXPERIMENTS, 26th
July 2011, BIRS, Banff, Canada.

③ 栄 伸一郎, Dynamics of pulses in two
dimensional thin domains, 研究集会「非線
形問題に現れる特異性の解析 (SNP2010)」
2010 年 11 月 29 日, 関西セミナーハウス.

④ 栄 伸一郎, Dynamics of pulses in two
dimensional thin domain, 研究集会
Far-From-Equilibrium Dynamics, 2011 年
1 月 7 日, 京都大学 数理解析研究所および
芝蘭会館.

⑤ 栄 伸一郎, The effect of boundary
conditions to the pulse dynamics,
Reaction-Diffusion Systems: Modeling and
Analysis, ReaDiLab Conference in Orsay
(France), 2009/6/2.

⑥ 栄 伸一郎, Effect of boundary
conditions on the dynamics of a pulse
solution for reaction-diffusion systems,
研究集会「微分方程式の総合的研究」,
2009 年 12 月 18 日, 東京大学大学院数理科学研究
科.

[その他]

ホームページ等

<http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~ichiro/index2.html>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

栄 伸一郎 (EI SHIN-ICHIRO)

九州大学・マス・フォア・インダストリ研
究所・教授

研究者番号 : 30201362

(2) 研究分担者

()

研究者番号 :

(3) 連携研究者

寅丸 敦 (TORAMARU ATSUSHI)

九州大学・理学研究院・教授

研究者番号 : 50202205