

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年6月7日現在

機関番号：12601

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2009年～2011年

課題番号：21654021

研究課題名（和文） 特異な係数を持つ確率偏微分方程式の研究

研究課題名（英文） Study on stochastic partial differential equations with singular coefficients

研究代表者

舟木 直久 (FUNAKI TADAHISA)

東京大学・大学院数理科学研究科・教授

研究者番号：60112174

研究成果の概要（和文）：2次元ヤング図形の運動を界面モデルの一種と捉え、その非平衡揺動極限の研究を行った。極限はある種の確率偏微分方程式によって記述される。さらに、時空のランダムな揺らぎの効果を考慮した界面成長方程式の平衡解、分数冪微分作用素を持つ確率偏微分方程式の確率的エントロピー解、調和写像に付随した熱方程式の爆発問題、非等方性を持つ Allen-Cahn 型方程式の特異極限および界面の位置に関する精密な評価等に関する研究を行った。

研究成果の概要（英文）：We have studied the nonequilibrium fluctuation limit for the motion of two dimensional Young diagrams from the aspect of interface model. The limit is described by a certain stochastic partial differential equation. Moreover, the equilibrium solution of the equation which describes the growth of interfaces in consideration of the random fluctuation effect in space and time, the stochastic entropic solution of the stochastic partial differential equation with fractional differential operators, blow-up problem in a harmonic map heat flow, the singular limit of anisotropic Allen-Cahn equations and precise estimates on the position of the interfaces are studied.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	700,000	0	700,000
2010年度	1,500,000	0	1,500,000
2011年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
年度			
総計	3,100,000	270,000	3,370,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：確率論・解析学・確率偏微分方程式

1. 研究開始当初の背景

(1) 確率偏微分方程式とは、ランダムな項を持つ偏微分方程式のことであり、物理学・生物学・工学・数理ファイナンスなど広範な分野において現れ、様々な観点から研究がなされている。

(2) 特異な係数を持つ確率偏微分方程式を考

察の対象とした背景には、界面モデルの研究およびランダムな進行波解の研究があった。

2. 研究の目的

(1) 界面モデルの研究：あるレベルを境にして異なる性質を持つ媒質中に置かれた結晶体（その表面を界面という）は、媒質の優位

性・劣性を反映して優位性を持つ側に偏って存在すると考えられる。そのような状況における界面のある種のスケール極限として、確率偏微分方程式を導くことが本研究の一つの目的である。

(2) 進行波の研究：反応項の係数が測度であるような反応拡散方程式の進行波解の研究が行われている。これにランダムな項が加わったときの影響を調べることは自然な問題である。

3. 研究の方法

(1) 非線形偏微分方程式の専門家の俣野、反射を持つ確率偏微分方程式の研究や確率偏微分方程式のシミュレーションを行う乙部、確率偏微分方程式、特に係数に対する滑らかさの条件の改良という観点から研究を進める謝、統計物理学に動機付けられた無限次元の確率論の問題を中心に研究する長田を研究分担者・連携研究者として配置し、研究代表者の舟木が中心となって研究を推進した。

(2) 研究成果は英国ケンブリッジ大学アイザック・ニュートン数理科学研究所における研究プログラム「確率偏微分方程式」とそれに関連する研究集会等において発表し、参加者との討論に基づきさらに進展させた。

4. 研究成果

(1) 研究代表者の舟木は、連携研究者の謝らと共に、界面モデルの一つとして、2次元ヤング図形の運動の非平衡揺動極限に関する研究を行い、極限がある種の確率偏微分方程式によって記述されることを証明した。舟木は別途、2次元ヤング図形の運動から、適切な時空のスケール極限を経て非線形偏微分方程式が導かれることを流体力学極限の手法を用いて示しているが、本研究ではその非線形偏微分方程式の解の周辺の揺動を調べた。非平衡揺動に関する数学的に厳密な結果はこれまでほとんど知られていなかった。フェルミ型と呼ばれる場合には、確率偏微分方程式の境界条件を特定する必要があり、一方ボーズ型と呼ばれる場合には、基本的にフェルミ型に対する結果からある種の非線形変換を経由して極限の確率偏微分方程式が導かれることがわかる。そのためには、収束をより強い関数空間上で示しておくことが要請された。

(2) 時空のランダムな揺らぎの効果を考慮した界面成長の様子を記述する方程式、すなわち Kardar-Parisi-Zhang (KPZ) 方程式に関する数学的研究が、近年急速に進展している。これは、特異性を内包する確率偏微分方程式の一種である。研究代表者の舟木は、無限次元解析の手法やブラウン汎関数の Wiener-伊藤展開などを用いて、KPZ 方程式の平衡解の

解析を進めた。

(3) 舟木はまた、粘性項のない Burgers 方程式に確率項が加わってできる確率偏微分方程式について、衝撃波の生成について調べた。この考察を基にして、分数階微分作用素を加えた確率偏微分方程式の確率的エントロピー解についての研究を謝と共に継続した。

(4) 研究分担者の俣野は、Allen-Cahn 型方程式の平面波の安定性を論じた。すなわち、遠方で減衰する摂動や、概周期的な摂動のクラスを考え、摂動を受けた界面が空間全体で一様に平面波に収束することを示した。また、調和写像に付随した熱方程式の爆発問題を考察し、2次元円板から球面への調和写像に付随した熱方程式の回転対称解の爆発のオーダーが自己相似爆発よりはるかに速いことを示した。

(5) ある種の非線形拡散方程式においては、拡散係数を0に近づけた特異極限において不連続な界面が現れ、その運動が平均曲率流に支配されることは知られている。分担者の俣野は、非等方性を持つ Allen-Cahn 型方程式の特異極限を考察し、界面の位置に関する精密な評価を導いた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計17件)

- ① T. Funaki, Hydrodynamic limit for the $\nabla \phi$ interface model via two-scale approach, Probability in Complex Physical Systems: In Honour of Erwin Bolthausen and Jurgen Gärtner, Springer, 査読有, 2012, 463-490.
- ② H. Matano and Y. Mori, Global existence and uniqueness of a three-dimensional model of cellular electrophysiology, Discrete and Continuous Dynamical Systems, Ser. A, 査読有, Vol. 29, 2011, 1573-1636.
- ③ H. Matano and M. Nara, Large time behavior of disturbed planar fronts in the Allen-Cahn equation, J. Differential Equations, 査読有, Vol. 251, 2011, 3522-3557.
- ④ H. Matano and F. Merle, Threshold and generic type I behaviors for a supercritical nonlinear heat equation, J. Funct. Anal., 査読有, Vol. 261, 2011, 716-748
- ⑤ T. Funaki and M. Sasada, Hydrodynamic limit for an evolutionary model of two-dimensional Young diagrams, Comm. Math. Phys., 査読有, Vol. 299, 2010, 335-363.

- ⑥ T. Funaki, Scaling limits for weakly pinned random walks with two large deviation minimizers, *J. Math. Soc. Japan*, 査読有, Vol.62, 2010, 1005-1041.
- ⑦ Y. Du and H. Matano, Convergence and sharp thresholds for propagation in nonlinear diffusion problems, *J. Eur. Math. Soc.*, 査読有, Vol.12, 2010, 279-312.
- ⑧ X. Liang, X. Lin and H. Matano, A variational problem associated with the minimal speed of travelling waves for spatially periodic reaction-diffusion equations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 査読有, Vol.462, 2010, 5605-5633.
- ⑨ M. Alfaro, H. Garcke, D. Hilhorst, H. Matano and R. Schaetzle, Motion by anisotropic mean curvature as sharp interface limit of an inhomogeneous and anisotropic Allen-Cahn equation, *Proc. Royal Soc. Edinburgh, Ser. A*, 査読有, Vol.140, 2010, 673-706.
- ⑩ J.-S. Guo, H. Matano and C.-C. Wu, An application of braid group theory to the finite time dead-core rate, *J. Evolution Equations*, 査読有, Vol.10, 2010, 835-855.
- ⑪ T. Funaki, Stochastic analysis on large scale interacting systems, *Selected Papers on Probab. and Statis., Translations (Amer. Math. Soc.)* 査読有, Vol.227, 2009, 49-73
- ⑫ E. Bolthausen, T. Funaki and T. Otake, Concentration under scaling limits for weakly pinned Gaussian random walks, *Probab. Theory Relat. Fields*, 査読有, Vol.143, 2009, 441-480.
- ⑬ T. Funaki and B. Xie, A stochastic heat equation with the distributions of Lévy processes as its invariant measures, *Stoch. Proc. Appl.*, 査読有, Vol.119, 2009, 307-326.
- ⑭ H. Matano and F. Merle, Classification of Type I and Type II behaviors for a supercritical nonlinear heat equation, *J. Funct. Anal.*, 査読有, Vol.256, 2009, 992-1064.
- ⑮ H. Berestycki, F. Hamel and H. Matano, Bistable travelling waves around an obstacle, *Comm. Pure Appl. Math.*, 査読有, Vol.62, 2009, 729-788.
- ⑯ S.B. Angenent, J. Hulshof and H. Matano, The radius of vanishing bubbles in equivariant harmonic map flow from D^2 to S^2 , *SIAM J. Math. Anal.*, 査読有, Vol.41, 2009, 1121-1137.
- ⑰ H. Matano, M. Nara and M. Taniguchi, Stability of planar waves in the Allen-Cahn equation, *Comm. Partial Differential Equations*, 査読有, Vol.34, 2009, 976-1002.
- [学会発表] (計46件)
- ① 舟木直久, Invariance of geometric Brownian motion for the stochastic heat equation related to the KPZ equation, 数理物理と確率解析, 湘南国際村センター第一研修室, 2012年3月12日.
- ② 舟木直久, Hydrodynamic limits for large scale interacting systems, Mathematics for Innovation: Large and Complex Systems, ESF-JSPS Frontier Science Conference Series for Young Researchers, The Four Seasons Hotel Tokyo at Chinzan-so, Tokyo, Japan (フォーシーズンズホテル椿山荘), 2012年3月1日.
- ③ 舟木直久, Invariant measure for a linear stochastic heat equation, 研究集会「無限粒子系、確率場の諸問題 VII」奈良女子大学理学部, 2011年10月15日.
- ④ 舟木直久, Interfaces in a stochastic reaction-diffusion equation and an evolutionary model of Young diagrams, *Reaction-Diffusion Systems in Mathematics and the Life Sciences, Université de Montpellier 2*, 2011年9月21日.
- ⑤ 舟木直久, Reaction-diffusion equations with random terms and their singular limits, Mathematics and biology: A ReaDiLab Seminar Day, University Paris-Diderot, IJM, 2011年9月13日.
- ⑥ 舟木直久, ヤング図形の時間発展とスケール極限, 信州大学数理科学談話会, 2011年7月21日.
- ⑦ 舟木直久, Scaling limits for dynamic models of 2D Young diagrams, Conference in Honor of the 70th Birthday of S.R. Srinivasa Varadhan, 臺灣大學, 2011年7月12日.
- ⑧ 舟木直久, Scaling limits for dynamic models of Young diagrams, Banff 数学国際研究拠点 (BIRS), 2011年6月1日.
- ⑨ 舟木直久, Non-equilibrium fluctuations for an evolutionary model of 2D Young diagrams, *Stochastic Partial Differential Equations and Related Topics*, 2011年4月25日, 南開大学 陳研究所(中国)

- ⑩ 舟木直久, An evolutional model of Young diagrams with conservation law, Workshop on the Fourier Law and Related Topics, Fields Institute, 2011年4月8日.
- ⑪ 俣野博, Traveling waves in a recurrently sawtoothed cylinder and their homogenization limit, 10th Workshop on Stochastic Analysis on Large Scale Interacting Systems, 2011年12月(高知大学)
- ⑫ 俣野博, Traveling waves in a sawtoothed cylinder and their homogenization limit, 55th AustMS Annual General Meeting (オーストラリア数学会年会全体講演), Wollongong, 2011年9月(オーストラリア).
- ⑬ 俣野博, Front profile of a singularly perturbed FitzHugh-Nagumo system, Workshop on Reaction-Diffusion systems in Mathematics and the Life Sciences, Montpellier, 2011年9月(フランス).
- ⑭ 俣野博, Front propagation in spatially heterogeneous media, The 4th MSJ-SI (Nonlinear Dynamics in Partial Differential Equations) (日本数学会季期研究所連続講演), 2011年9月(九州大学).
- ⑮ 俣野博, Convergence results in order-preserving dynamical systems, Conference on Asymptotic dynamics driven by solitons and traveling fronts in nonlinear PDE, Santiago, 2011年7月(チリ).
- ⑯ 俣野博, Propagating terrace in one-dimensional semilinear diffusion equation, Conference on Fronts and nonlinear PDE's, Paris, 2011年6月(フランス).
- ⑰ 俣野博, Traveling waves in a sawtoothed cylinder and their homogenization limit, Conference on Nonlinear Models in PDE's, Toledo, June, 2011(スペイン).
- ⑱ 舟木直久, An evolutional model of Young diagrams with conservation law, 台湾, 2011年3月10日.
- ⑲ 舟木直久, Hydrodynamic limit for interacting systems: lattice gases and interface models, 台湾中央研究院数学研究所, 2011年3月7日.
- ⑳ 舟木直久, Scaling limits for the interface models and derivation of nonlinear PDEs, Mathematical Colloquium, 2010年11月17日, Darmstadt(ドイツ)
- ㉑ 舟木直久, Hydrodynamic limit for 2D and 3D Young diagrams, Large Scale Stochastic Dynamics, 2010年11月10日, Oberwolfach(ドイツ)
- ㉒ 舟木直久, Hydrodynamic limit for 2D and 3D Young diagrams, Workshop on Probabilistic Techniques in Statistical Mechanics, 2010年10月14日, Berlin(ドイツ)
- ㉓ 舟木直久, Hydrodynamic limit for a dynamic model of 2D Young diagrams, 5th Pacific Rim Conference on Mathematics, 2010年7月1日, Stanford(アメリカ)
- ㉔ 舟木直久, Hydrodynamic limit for a dynamic model of 2D Young diagrams, Probability Seminar, 2010年5月4日, Paris(フランス)
- ㉕ 俣野博, Comparison of rescaled energy for a supercritical nonlinear heat equation, Initial Training Network FIRST Workshop on Blow-up and Singularities, Bratislava, 2011年3月(スロバキア)
- ㉖ 俣野博, Global solutions for a 3D model of cellular electrophysiology, Conference on Far-From-Equilibrium-Dynamics 2011, 2011年1月, 京都大学
- ㉗ 俣野博, Front propagation in hyperbolic space, Conference on Interface Motion and Traveling Waves in Reaction Diffusion Equations, 2010年10月, Shanghai(中国)
- ㉘ 俣野博, Front propagation under ergodic perturbations; Front propagation in the hyperbolic space, Conference on Nonlinear PDE's, 2010年10月, Pohang(韓国)
- ㉙ 俣野博, Comparison of the rescaled energy for supercritical nonlinear heat equations, 4th Euro-Japanese Conference on Blow-up, 2010年9月, Leiden(オランダ)
- ㉚ 俣野博, Front propagation on nonlinear diffusion equation on hyperbolic space, Workshop on Recent Advances on de Giorgi's Conjecture and the Study of Entire Solutions of Nonlinear Scalar Equations, 2010年8月, Banff(カナダ)
- ㉛ 俣野博, Threshold and generic type I behaviors for a supercritical nonlinear heat equation, 8th AIMS International Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, 2010年5月, Dresden(ドイツ)
- ㉜ 舟木直久, Brascamp-Lieb inequality and its applications to Wiener integrals

- for centered Bessel processes, Welsh Probability Seminar, 2010年3月5日, Swansea University (英国・スワンジー)
- ③③ 舟木直久, Brascamp-Lieb inequality and its applications to Wiener integrals for centered Bessel processes, Stochastic Analysis Seminar, 2010年2月25日, School of Math., Loughborough Univ. (英国・ラフボロ)
- ③④ 舟木直久, Hydrodynamic limit for surface diffusion in 2D Young diagrams, Probability Forum, 2010年2月24日, Warwick University, (英国・コヴェントリー)
- ③⑤ 舟木直久, Brascamp-Lieb inequality and Wiener integrals for centered Bessel processes, Stochastic Partial Differential Equations Seminar, 2010年2月23日, Isaac Newton Institute for Math. Sci., Cambridge University (英国・ケンブリッジ)
- ③⑥ 舟木直久, Scaling limits for a dynamic model of 2D Young diagrams, The First CREST-SBM International Conference "Random Media", 2010年1月26日, 仙台国際センター
- ③⑦ 舟木直久, 2次元ヤング図形の時間発展モデルに対する流体力学極限, 京都大学理学研究科談話会, 2010年1月20日, 京都大学理学研究科
- ③⑧ 舟木直久, Scaling limits for a dynamic model of 2D Young diagrams, Workshop: Stochastic Partial Differential Equations, 2010年1月4日, Isaac Newton Institute for Math. Sci., Cambridge University (英国・ケンブリッジ)
- ③⑨ 舟木直久, 流体力学極限 -- 非線形偏微分方程式のミクロな相互作用系からの導出, CREST「現代数学解析による流体力学の未解決問題への挑戦」立上げ研究集会, 2009年11月20日, 早稲田大学理工学部
- ④⑩ 舟木直久, Scaling limits for weakly pinned random walks with two large deviation minimizers, 13th Brazilian School of Probability, 2009年8月6日, ブラジル・マレシアス
- ④⑪ 舟木直久, Hydrodynamic limit for an evolutionary model of 2D Young diagrams, 27th Brazilian Mathematics Colloquium, Probability Session, 2009年7月31日, ブラジル純粋・応用数学研究所(ブラジル・リオデジャネイロ)
- ④⑫ 舟木直久, A stochastic heat equation with the distributions of Lévy processes as its invariant measures, Workshop on Stochastic Partial Differential Equations, 2009年7月21

- 日, 山東大学威海校(中国・威海)
- ④⑬ 舟木直久, Hydrodynamic limit and nonlinear PDEs, Mathematical Fluid Dynamics Launching Workshop, 2009年4月16日, 早稲田大学理工学部
- ④⑭ 俣野博, Homogenization limit of recurrent traveling waves in a 2D cylinder with saw-toothed boundary, The Second Chile-Japan Workshop on Nonlinear Elliptic and Parabolic PDEs, 2009年12月, 明治大学
- ④⑮ 俣野博, Front propagation in spatially ergodic media, Conference on Mathematical Challenges Motivated by Multi-Phase Materials, 2009年6月, Anogia (ギリシャ)
- ④⑯ 俣野博, Mathematical Analysis of a 3D Model of Cellular Electrophysiology, Workshop on Reaction-Diffusion Systems: Modelling and Analysis, 2009年6月, Orsay (フランス)

〔図書〕(計1件)

舟木直久他共著者 64名, P. レヴィ著『一確率論研究者の回想』, 科学者の本棚, 岩波書店, 全256ページ, 2011年

6. 研究組織

(1) 研究代表者

舟木直久 (FUNAKI TADAHISA)

東京大学・大学院数理科学研究科・教授
研究者番号: 60112174

(2) 研究分担者

俣野博 (MATANO HIROSHI)

東京大学・大学院数理科学研究科・教授
研究者番号: 40126165

(3) 連携研究者

長田博文 (OSADA HIROFUMI)

九州大学・大学院数理学研究院・教授
研究者番号: 20177207

乙部 巖己 (OTOBE YOSHIKI)

信州大学・理学部・准教授
研究者番号: 30334882

謝 賓 (XIE BIN)

信州大学・ファイバーナノテク国際若手
研究者育成拠点・助教
研究者番号: 50510038