様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 24 年 5 月 25 日現在

機関番号：14401
研究種目：挑戦的萌芽研究
研究期間：2009～2011
課題番号：21654022
研究課題名（和文） 曲線のモジュライ空間における標準的ブラウン運動の構成とその確率解析的研究の例示
研究課題名（英文） Construction of the canonical Brownian motion on moduli space of curves and illustration of its application to stochastic analysis

研究代表者
盛田　健彦（MORITA TAKEHIKO）
大阪大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：00192782

研究成果の概要（和文）：タイヒミュラー空間とよばれる幾何学的に重要な空間上の標準的な拡散現象を記述する確率過程の候補を２通りの方法で構成した。その応用の例示には至らなかったが、副産物として、２点間の距離を拡大する関数の拡大率を最適化する尺度の通有的性質、写像トーラスと呼ばれる幾何的対象の上のランダム現象と背後にある力学系との対応、および、ノイズをもった区間上の時間発展現象とノイズのランダムネスの関係に関する成果を得た。

研究成果の概要（英文）：We construct candidates of the canonical Brownian motions on Teichmüller space via two ways. Although we are not so successful in illustrating an example of application of them, we obtain three auxiliary results. The first is concerned with generic properties of optimization measure for expanding maps, the second is concerned with harmonic measure for a class of mapping tori, and the third is concerned with one-dimensional random dynamical systems.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2009 年度	1,100,000	0	1,100,000
2010 年度	1,000,000	0	1,000,000
2011 年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
年度			
総　計	3,000,000	270,000	3,270,000

研究分野：エルゴード理論、確率論、力学系
科研費の分科・細目：数学・基礎解析学
キーワード：確率解析、ランダム力学系

１．研究開始当初の背景

(1) 微分可能多様体上の拡散過程を用いてその多様体の特性を研究する確率解析的手法は既にかなりの成功をおさめていたといってよいだろう。一方で、拡散過程自体は適当な条件をみたす位相空間でありさえすれば定義できる対象であり、応用範囲はもっと広範であることが期待される状況にあった。一方、微分幾何学、代数幾何学、複素多様体論で扱われる重要な対象としてモジュライ空間がある。モジュライ空間は多くの場合、特異点あるいは特異集合を有しているため、従来の解析的手法の適用が困難であり、その詳細な構造を調べるための新しい手法が必要であった。

(2) 構造が最も研究されているモジュライ空間の例として、曲線のモジュライ空間、すな

わち、リーマン面の複素構造全体とその上の正則２次微分のモジュライ空間がある。正則２次微分には、正則１次微分(第１種アーベル微分)の二乗として表されるものとそうでないものがあるが、リーマン面の二重被覆を考えることによってアーベル微分の場合を扱えばよいことになる。種数 $g \geqq 2$ の閉リーマンのモジュライ空間は、その普遍被覆に相当するタイヒミュラー空間の写像類群の作用による商空間として与えられる。タイヒミュラー空間には、少なくとも２つの自然な計量が入ることが知られていた。一つは擬等角変形の立場から自然なタイヒミュラー計量であり、もう一つは保型形式の立場から自然なケーラー計量、すなわち、ヴェイユ・ピーターソン計量である。種数２以上の場合の両者の違いをまとめておくと：

①　タイヒミュラー計量は、十分な滑らかさが期待できないフィンスラー計量ではあるが、完備計量である。ただし、負曲率ではない。

②　ヴェイユ・ピーターソン計量は、実解析的なケーラー計量であるが、完備性は期待できない。ただし、負曲率である。

よく知られているように種数１の場合は、定義より両者ともポアンカレ計量となる。複素上半平面においては、ポアンカレ計量は、ケーラー計量であり、完備、負曲率で写像類群であるモジュラー群の作用が境界である実軸にまで連続に拡張できる。すなわち、タイヒミュラー計量とヴェイユ・ピーターソン計量の望ましい部分の両面を備えていた訳である。

２．研究の目的

(1) 本研究の目的は、曲線のモジュライ空間上に標準的なブラウン運動と思しき拡散過程を構成し、それを用いた確率解析的手法による曲線のモジュライ空間とその上のアーベル微分のモジュライ空間の構造研究の一例を示すことである。

(2) 多様体上で確率解析を展開する場合、基準となるブラウン運動として、リーマン多様体であればリーマン計量に関するラプラス・ベルトラミ作用素を生成作用素とするブラウン運動を採用するのが自然である。ところが、モジュライ空間の場合、これこそ決定版という計量を探すのは、本研究で扱う最も簡単な場合ですら明らかではない。したがって：

①　その構造を解析するためのブラウン運動としてもっとも相応しい拡散過程がなにか？

という問題の解決から始めなければならない。ブラウン運動として適当なものを探し出すには、曲線のモジュライ空間のみならず２次微分、したがって、アーベル微分のモジュライ空間をも考慮して議論をすすめるべきであるというのが、本研究でアーベル微分のモジュライ空間を前面に出した理由の一つである。

さて，タイヒミュラー測地流と相性の良い拡散過程を探し出したとして、次に行うべきことは、実際に確率解析を適用して

②　アーベル微分のモジュライ空間におけるブラウン運動の挙動からアーベル微分のジェネリックな性質を導きだすことはできないか？

という問題に関して具体例をあげることである。もちろん、タイヒミュラー測地流を用いて得られた Thurston の予想の別証明を得ることができれば一例となる。

以上の ①、② が本研究の具体的な目標であった。

３．研究の方法

(1) 初年度は、まず，アーベル微分のモジュライ空間上のタイヒミュラー測地流と相性のよい拡散過程を決定するために、タイヒミュラー空間上の拡散過程から考察を始めた。まず、基本的な先行結果による事実として：

①　タイヒミュラー空間にはタイヒミュラー計量とヴェイユ・ピーターソン計量という２つの計量が入り、それぞれ考察する対象によって自然なものとみなすことができ、種数１の場合には両者はポアンカレ計量に一致する。

②　タイヒミュラー空間の余接バンドルは自然な方法（Serre 双対性）で正則２次微分のバンドルと同一視される。正則２次微分には、正則１次微分（第１種アーベル微分）の二乗で表されるものと、それ以外のものがあり、後者については考えているリーマン面の二重被覆を考えることによって前者に帰着できる。

③　タイヒミュラー空間から写像類群の作用で商空間を作ったものが曲線のモジュライ空間である。アーベル微分のモジュライ空間も自然に定まる。

④　２次微分のモジュライ空間には、したがってアーベル微分のモジュライ空間には、特異点パターンによって有限個の階層からなる階層構造が入り、各階層はタイヒミュラー測地流によって保存され、有限個の連結成分からなっている。

の確認と再考が必要であった。それはアーベル微分モジュライ空間の連結成分を一つ固定して話をすすめれば良いということを理解しておくことが望ましいからである。そのためには，研究立ち上げの段階で，必要に応じて他大学等から専門家を招いてセミナーや勉強会を行った。

(2) その後、タイヒミュラー計量(T-計量 と略す)によるブラウン運動(T-BM と略す)とヴェイユ・ピーターソン計量(WP-計量 と略す)によるブラウン運動(WP-BM と略す)を構成し、その比較をタイヒミュラー測地流との相性と関連させて行う作業に入った。測地流と相性に重点を置くのであれば、T-BM とは如何なるものであるべきか確定する際に、さまざまな観点からの比較が必要であることがわかってきた。その一つはポテンシャル論的な観点からの比較である。WP-計量は完備ではないが，対応する WP-BM が確率論的に完備でないこともただちに従うわけではない。そこで、当初は WP-BM の生存時間の評価を行い、その結果に応じてマルティン境界の考察法をかえるという方向で考えた。しかしながら、T-ブラウン運動の構成という問題自体が容易なものではないことが判明し、本研究の多くの時間はこれに割かねばならないことになった。５通りの方法を試みたが、結局、Sturm による距離空間上の拡散過程の構成を応用する方法とタイヒミュラー計量に付随する接触リーマン計量からディリクレ形式を対応させて拡散過程を構成する２つの方法に至った。

(3) 続いて Veech-Masur の定理、すなわち、測度付き葉層構造に関する Thurston の予想の肯定的解決を参考にしながら、T-ブラウン運動の応用の例示を見いだす作業に入った。そのためには、次に列挙する事実についての詳細な再考によって必要な知識と技術の獲得をはかった。具体的には、

①　閉リーマン面上の正則２次微分の垂平方向の軌道を葉とする葉層構造をその正則２次微分の水平葉層構造という。水平葉層構造は，２次微分を局所的にアーベル微分の二乗とみなすことによって、水平方向の葉の間の垂直方向の変分を測ることで横断測度を備えたことになり、自然に測度付き葉層構造となる。もし、２次微分が定める水平葉層構造が２次微分自身から誘導される横断測度の定数倍以外の横断測度を持たないならば、その水平葉層構造は一意エルゴード的であるという。水平葉層構造が一意エルゴード的であるということは、その軌道の分布が一様であることを意味し、応用上重要である。

②「閉リーマン面上の ’ほとんどすべて’ の正則２次微分の水平葉層構造は一意エルゴード的である」という W. Thurston による予想の解決に至った H. Masur の証明技巧を検証する。

４．研究成果

(1) タイヒミュラー空間上の標準的ブラウン運動構成に向けて次の５通りの構成法を試みた。

① フィンスラー計量に関しても十分な滑らかさを仮定すればそれに付随する接触リーマン計量を用いてラプラス作用素が定義できる。これに着目し、タイヒミュラー計量は期待できるほどの滑らかさは備えてはいないもののラプラス作用素の局所表示に現れる諸量は定義可能であることを確認し、滑らかではないが‘ほとんどいたるところ’連続な係数をもつ拡散生成作用素を構成した。

② 本質的に ① と同様であるが、① の作用素が形式的な計算で適当な測度に対して発散形であることを示し、対応する対称形式を導き拡散過程が構成できることを確認した。

③ タイヒミュラー距離から出発して Sturm の手法によって飛躍過程のディリクレ形式の Γ 極限として局所的なディリクレ形式を導き拡散過程を構成した。

④ ③ の方法を確率過程の収束の枠組みで議論することにも着手したが、未だ最終結果には至っていない。

⑤　調和関数の平均値の定理を念頭において漸近的平均値によるラプラス作用素の定義を試みた。もし、タイヒミュラー計量が滑らかであればこれは 上述の①で与えたラプラス作用素との関係は、滑らかさに難点があるため厳密証明が課題として残った。

上の ①、③ の拡散過程の構成法については目標を達成したが、このままでは成果としてインパクトに欠ける。機会があれば論文として発表したいと思っている。

(2) 当初の目的は、平成 22 年度までに得られたいくつかの拡散過程のいずれかに確率解析を応用して Keane-Thurston 予想の確率解析的別証明を与えることを試みることであったが、それらの拡散過程に付随する容量については拡散係数の正則性に関する難点があり、一意エルゴード的でない水平葉層構造をもつアーベル微分全体の次元の評価にはいたらなかった。ただし、本研究の副産物として、生野の成果を得ることができた。

① 写像トーラス上の調和測度の特徴付けに関する結果を得て、平成 21 年 10 月広島大学で開催された研究集会「最近の解析学の話題とその周辺から」での招待講演 Harmonic measures for a class of mapping tori で発表した。

② コンパクト多様体上の拡大的写像の最大化測度の一意性やエントロピーに関する結果と、葉層空間の調和測度と各葉ブラウン運動の滞在時間に関するある種の極限定理がある。前者は徳永 裕介 氏との共同研究であり、連名で 2010 年 9月に開催された日本数学会秋季総合分科会の一般講演として発表した。

③ 一般化された Lasota-Yorke 写像（以下、GLY 写像という）のランダムな反復合成から定義されるランダム力学系に関して本研究代表者が過去に行なった研究結果の改良版が得られた。具体的には、必ずしも独立ではない定常過程にしたがって各時刻毎に GLY 写像をランダムに選択し、写像の合成を反復することによって与えられるランダム力学系を考える。このとき、ランダムネスを与える定常過程のエルゴード理論的性質の強度に応じて、ランダム力学系に対応する歪積変換がもつエルゴード理論的性質が次のように影響される。ランダムネスがエルゴード性をもつならば、歪積変換は有限個のエルゴード成分をもち、それぞれのエルゴード成分は歪積変換の有限回の反復合成によって全エルゴード的成分に分かれる。さらに、ランダムネスのエルゴード理論的な性質を、弱混合性、混合性、完全性と強めていくと，歪積変換の全エルゴード成分もこれに応じて、弱混合的成分、混合的成分、完全成分となる。この結果については 2011 年 8 月末に北海道大学で開催された研究集会「Control and Noise in Dynamical Systems」での招待講演 Spectral decomposition of one dimensional random dynamical systems において報告した。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計２件）

① Morita,T. Generalization of the continued fraction transformation and the Selberg zeta functions, 数理解析研究所講究録, 査読無 177720 (2012) 1--20

② Morita,T. Renormalized Rauzy Veech Zorich inductions, Comtemp. Math. 査読有 484 (2009) 135--131

〔学会発表〕（計５件）

① 盛田 健彦、Spectral decomposition of one-dimensional random dynamical systems、Control and Noise in Dynamical System (Part 2) 2011 年 8 月 30 日、北海道大学大学院理学研究科

② 徳永 裕介；盛田 健彦、Measures with maximal total exponents of C^1 expanding maps, 日本数学会秋季総合分科会、2010 年 9 月 22 日、名古屋大学大学院多元数理科学研究科

③ 盛田 健彦、Harmonic measures for a class of mapping tori、解析学の最近の話題とその周辺から、2009 年 10 月 9 日、広島大学大学院理学研究科

６．研究組織

(1)研究代表者

盛田 健彦（MORITA TAKEHIKO）

大阪大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：00192782

(2)研究分担者

（ ）

研究者番号：

(3)連携研究者

（ ）

研究者番号：