

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 5 月 21 日現在

機関番号：10101

研究種目：若手研究（A）

研究期間：2009～2012

課題番号：21684001

研究課題名（和文） 特異点を持つシンプレクティック多様体上のラグランジアンファイブレーションの構造

研究課題名（英文） On Lagrangian fibrations of symplectic varieties

## 研究代表者

松下 大介（MATSUSHITA DAISUKE）

北海道大学・大学院理学研究院・准教授

研究者番号：90333591

研究成果の概要（和文）：ラグランジアンファイブレーションの底空間が非特異であり，かつ元のシンプレクティック多様体がある数値的条件を満たせば，非特異でなくても底空間は射影空間となることを示した．また現在知られている具体例のうち二つの例外を除いてラグランジアンファイブレーションが存在するための必要十分条件を求めた．また底空間が非特異なラグランジアンファイブレーションの相対モジュライがモジュライの点に対応する層が可逆層であれば非特異であることを示した．

研究成果の概要（英文）： We show that the base space of a Lagrangian fibration is a projective space if the source symplectic variety satisfies certain numerical conditions. We obtain the necessary and sufficient condition of existence of a Lagrangian fibration for all known examples. We also show smoothness of components of the relative moduli space of a Lagrangian fibration which parametrize invertible sheaves on each fibre.

## 交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2009 年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2010 年度	1,800,000	540,000	2,340,000
2011 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2012 年度	1,800,000	540,000	2,340,000
年度			
総計	5,800,000	1,740,000	7,540,000

研究分野：代数学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：シンプレクティック, ラグランジアン

## 1. 研究開始当初の背景

シンプレクティック多様体は代数多様体の中で Calabi-Yau 多様体, Abel 多様体と並んで局所平坦なもの構成要素の一部であることは 1980 年代から認識されていたが, 高次元代数多様体の扱いが難しいこともあって 1990 年代後半までほとんど調べられてこなかった. その一方で 1997 年頃から様々な現象が知られるようになり, このクラスの多様体は具体例を構成するのが非常に困難なこと, その一方でその構造に著しい制限がつくことがわかってきた. 前者の具体的な事例として 1980 年に微分同相でない二つの例が各次元に構成された後, 未だに次元が 6,10 以外ではそれ以外の具体例が知られていないことがあげられる. 後者の事例としては, 現在知られている具体例で, 次元が小さい多様体への写像は, 像である多様体は必ず射影空間となり, ファイバーはラグランジアン部分多様体となる, というものがある. そこで, 新しい具体例の構成方法はなにか, またこれらの現象が一般のシンプレクティック多様体ではどの程度見られるか, というのがシンプレクティック多様体の主要問題として認識されていた.

## 2. 研究の目的

本研究では次の三点を解明することを試みた.

(1). 必ずしも非特異とは限らないシンプレクティック多様体に入るラグランジアンファイブレーションの底空間がどのように特徴づけられるか? また底空間が非特異であるという条件下では何が言えるか?

(2). 既約シンプレクティック多様体で

isotropic と呼ばれる数値的条件を満たす因子があったとき, その因子を用いてラグランジアンファイブレーションを構成出来るか?

(3) ラグランジアンファイブレーションが与えられたとき, その双対ラグランジアンファイブレーションは構成出来るか? また構成出来たとして元のラグランジアンファイブレーションとの関係はどのようなものになるか?

## 3. 研究の方法

ラグランジアンファイブレーションと関連する研究は世界各地で行われているため, 国際研究会に出席, 結果発表を行い, また情報端末を購入してインターネットを通じた交流を行った. その他, 2010 年度をのぞき, 北海道大学と京都大学を会場として研究会を開催し, 国内外から研究者を招聘し, 討論をおこなった.

## 4. 研究成果

研究目的に記した三項目についてそれぞれ得られた結果を述べる.

(1). 非特異とは限らないシンプレクティック多様体で不正則数  $q$  が 0 であり, シンプレクティック形式が実質的に一つしかないものを考える. このような多様体に入るラグランジアンファイブレーションで底空間が非特異なものがあったとき, 底空間は射影空間となる. また底空間が非特異でない場合は射影空間とならない例がある.

(2). 現在知られている既約シンプレクティック多様体は二つの例外を除き,  $K3$  曲面の Hilbert scheme あるいは Abel 曲面の

Hilbert scheme のアルバネーゼ写像のファイバーと変形同値となる。これらの多様体に対し、国内外の研究者の結果を合わせることで理想的な結果, isotropic な因子があれば射影空間を底空間とするラグランジアンファイブレーションが因子の線形系から構成出来ることを証明した。

(3) . 非特異なシンプレクティック多様体にラグランジアンファイブレーションが入っており, 底空間が非特異とする。このとき, 各ファイバーの上での可逆層のモジュライは非特異であることを示した。このモジュライをコンパクト化するとよじれ自由な層に対応する点が境界にあらわれるため, その部分の特異性がどうなるかが, これからの課題である。

1~ 3 の内容は機会があるごとに口頭発表はしているが, 2010 年度に体調を崩し一ヶ月半入院したため, 論文執筆が滞っている。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 1 件)

① 松下大介, “On Lagrangian fibrations”, 第 57 回代数学シンポジウム報告集(査読なし), vol 57, 2013, 177-182.

[学会発表] (計 11 件)

① Daisuke MATSUSHITA, “A base space of Lagrangian fibrations of symplectic varieties”, Laboratory of algebraic geometry: weekly seminar(招待講演), 2013 Mar. 6, Russia, Moscow, Higher School of

Economy.

② 松下大介, “On birational semi-rigidity of Lagrangian fibrations”, 大阪大学代数学幾何セミナー(招待講演), 2012 Dec. 17, 大阪大学(大阪府豊中市).

③ Daisuke MATSUSHITA, “On isotropic divisors of the Hilbert scheme of K3 surfaces”, Hyper-Kahler Geometry(招待講演), 2012 Nov. 1, USA, NY, Simons Center of Geometry.

④ 松下大介, “On Lagrangian fibrations”, 第 57 回代数学シンポジウム(招待講演), 2012 Aug. 22, 京都大学数理解析研究所(京都市左京区)

⑤ Daisuke MATSUSHITA, “On semiampleness of nef divisors on the hilbert scheme of K3 surfaces”, Kaehler geometry builds on classical algebraic geometry(招待講演), 2012 May 24, フランス, ナント, Leray 研究所.

⑥ Daisuke MATSUSHITA, “Birational semi rigidity of Lagrangian fibrations”, Symposium on projective algebraic varieties and moduli(招待講演), 2012 Feb. 16, 韓国, プサン, Novotel hotel.

⑦ Daisuke MATSUSHITA, “On rational Lagrangian fibrations of irreducible symplectic manifolds”, Moduli spaces and automorphic forms(招待講演), 2011 Oct. 14, フランス, マルセイユ, Luminy 研究所.

⑧ 松下大介, “単位円板上の Abelian

fibration の双対極小モデルについて”, 京都大学代数幾何セミナー(招待講演), 2010 May, 21, 京都大学(京都市左京区).

⑨ Daisuke MATSUSHITA, “On Lagrangian fibrations”, Algebraic Geometry Seminar(招待講演), 2010 Feb. 10, USA, Ann Arbor, University of Michigan.

⑩ 松下大介, “アーベル多様体の相対コンパクト化について”, 代数幾何の諸問題, 2009 Sep. 2, 北海道大学(札幌市北区).

⑪ 松下大介, “On elliptic fibrations and Lagrangian fibrations”, 京都大学談話会(招待講演), 2009 Jun.24, 京都大学(京都市左京区)

[その他]

2009 年 12 月に開催した京都大学での研究集会での報告集が以下の形で出版された.

RIMS Kokyuroku Bessatu B24, “Higher Dimensional Algebraic Geometry”, 2011 Mar. 京都大学数理解析研究所発行.

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

松下大介 (MATSUSHITA DAISUKE)  
北海道大学・大学院理学研究院・准教授  
研究者番号 90333591

### (2) 研究分担者

なし

### (3) 連携研究者

なし