

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 12 日現在

機関番号：62615

研究種目：若手研究(A)

研究期間：2009～2013

課題番号：21684002

研究課題名(和文) グラフ彩色問題に関するグラフ構造解析と高速アルゴリズムの開発

研究課題名(英文) structural graph theory and efficient algorithm for graph coloring problems

研究代表者

河原林 健一 (Kawarabayashi, Ken-ichi)

国立情報学研究所・情報学プリンシプル研究系・教授

研究者番号：40361159

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 8,200,000円、(間接経費) 2,460,000円

研究成果の概要(和文)：本研究課題では、曲面上に埋め込まれたグラフ、マイナー操作に閉じたグラフに関するグラフ彩色問題に関して研究を行った。中でも以下の点について知見を得た。1. 曲面上に埋め込まれたグラフに関するグラフ彩色、リスト彩色問題。2. Hadwiger予想に対する最少反例に関する問題。

1に関しては、1.1) 5リスト彩色性、1.2) 三角形、四角形をふくまないグラフに関する3リスト彩色性、に対して、多項式時間アルゴリズムを与えた。

2に対しては、Hadwiger予想に対する「最少反例」が存在したとすれば、 $0.2k$ 連結グラフである、ということを証明した。

研究成果の概要(英文)：In this research, we have worked on graph coloring problem for 1. graphs on a surface, and 2. minor-closed family of graphs.

Concerning the first one, we give several algorithmic results. Namely, we give a polynomial time algorithm for deciding 5-list-colorability of graphs on a fixed surface, and for deciding 3-list-colorability of graphs of girth five on a fixed surface. Concerning the second one, we show that minimal-counterexample to the famous Hadwiger's conjecture is $0.2k$ -connected for the case k . This is the first step toward a characterization of such a minimal-counterexample.

研究分野：数学

科研費の分科・細目：数学一般

キーワード：グラフ彩色 アルゴリズム

1. 研究開始当初の背景

グラフ彩色問題とは、頂点と辺からなるグラフの点を彩色する際、互いに隣接しあう点同士を異なる色に彩色するには何色が必要となるか? という問題である。当問題は、ネットワーク(グラフ)の分割や巨大なグラフの解析する上で必要不可欠な理論であることが古くから指摘されているが、計算理論の視点では NP 困難のクラスに属し、一般的にはグラフの入力に対して、多項式時間で解くのは非常に困難であると言われている。さらに近年では多項式時間での近似さえ難しいことが指摘されている。これはグラフ理論における非常に難解な予想、例えば Hadwiger 予想や Tutte の Flow 予想等のほとんどがグラフ彩色問題に関連していることから明らかである。

グラフ彩色問題が難解な理由の一つは、グラフを大域的に解析する必要があることにある。例えば Erdos の古典的なグラフの結果では、グラフの最少サイクルの長さ (girth) が任意に大きく、かつ彩色数が任意に大きくなるグラフの例が挙げられているが、このグラフは、ローカルには彩色数が 2 の「木」の構造をしているにもかかわらず、大域的にはグラフの頂点数に依存する彩色数が必要なのである。この例を見ても明らかな通り、グラフの彩色数を決定するためには、グラフをローカルに捉えるだけでなく、大域的な解析が必要不可欠なのである。グラフ彩色問題は離散数学のみならず、アルゴリズム分野でも中心的課題である。

私は既に、難解なグラフマイナー理論をアルゴリズム設計へ非常に効果的に応用することに成功している。その結果、多数の高速アルゴリズムを開発し、平面グラフ、および曲面上に埋め込まれたグラフに関するグラフ彩色問題アルゴリズム、マイナーに関して閉じたグラフに関するグラフ彩色アルゴリズム (FOCS '05, STOC '06 (with E. Demaine and M. Hajiaghayi)) などの論文を発表してきた。ACM 計算理論国際会議 (STOC), IEEE 計算基礎理論国際会議 (FOCS), ACM-SIAM 離散アルゴリズム国際会議 (SODA) は、理論計算機分野において最高峰の 3 大国際会議とみなされており、これらの会議にグラフ彩色問題のアルゴリズムが採用されることはきわめて稀である。

当該研究はグラフ理論の中で最も難解な分野に属すると言われており、離散数学分野の中でも最も先端的な研究である。私は 2008 年 10 月にバンフ研究所 (BIRS) において、「グラフマイナー (Graph Minors)」に関するワークショップの組織委員として、全世界の研究者を招聘し、最先端の研究成果の発表と情報交換を行った。このワークショップにおいて、グラフ構造の解析 (特にマイナー操作に関して閉じているグラフの族) と彩色問題が今後の研究において主要なテーマにな

ることが確認された。

2. 研究の目的

近年、ある制限されたクラスのグラフについては、よい「解答」が得られることが明らかとなった。その中でも最も有名な定理が 4 色定理である。4 色定理とは平面グラフの場合は 4 色で彩色が可能である、とする定理であり、120 年間未解決であった後、Appel と Hakken によって 1977 年に解決された問題である。この解決以降、グラフ彩色とあるグラフのクラス、曲面上に埋め込まれたグラフや、マイナー操作に関して閉じているグラフについての研究が盛んに行われるようになり、当該分野の研究が盛んになりつつある。特に近年ではグラフマイナー理論の登場により、グラフ彩色問題は当該分野の最先端の研究分野に位置付けられている。しかし 4 色定理の拡張予想である Hadwiger 予想や、曲面上のグラフの 4 色性の判定といった主要問題は未解決である。両問題とも、グラフ構造的解析とグラフ彩色の関連の理解不足が原因である。本研究では、曲面上に埋め込まれたグラフ、マイナーに関して閉じているグラフに関するグラフ彩色問題に対して、グラフマイナー理論で用いられた手法を利用した構造的解析とアルゴリズム開発を目指す。

3. 研究の方法

本研究では、4 色定理の拡張予想である Hadwiger 予想へのアプローチと、平面グラフを一般の曲面に拡張した彩色問題の研究を行った。具体的な研究内容は以下の通りである。

(1) Hadwiger 予想のアルゴリズム的側面への取り組み

Hadwiger 予想の N が 7 より大きい場合については、現在のところ全く手がかりがない。しかし以下のアルゴリズム的問題が Seymour によって提案されている。それは「Hadwiger 予想の一般の場合は、グラフの入力に対する多項式時間で決定可能である」という命題である。この予想は「 N 点の完全グラフをマイナーとして含まないクラスのグラフ」と「 $N-1$ 彩色が可能であるグラフのクラス」の共通部分集合は、多項式で識別可能だということを示唆している。この予想は申請者が中心に行っているアルゴリズム的グラフマイナー理論を応用して解決を試みた。アルゴリズム的グラフマイナー理論の成果として、マイナー操作に関して閉じているグラフに関しては、グラフ彩色数に関して非常に良い近似比の多項式時間アルゴリズムが既に得られている。これらの証明手法を発展させて、上記の問題解決に取り組んだ。

(2) 曲面上のグラフの彩色問題の解決
平面グラフ上での彩色問題については、4 色

定理をはじめ様々なことが徐々に明らかとなってきた。しかし「曲面上グラフでは、平面グラフと彩色数がどの程度本質的に異なるのか?」「平面と曲面での彩色数の違いは何に起因するのか?」等々、未だ解決されていない問題も多い。私は、これらの問題に取り組み、グラフマイナー理論を応用することによって、曲面上のグラフの彩色問題について解決を試みる。

特に近年、私は Thomassen 氏との共同研究を通して、3 閉路も 4 閉路も含まない平面グラフの分割問題に対して、一定の成果を治めてきた。この結果を曲面上に拡張することにより、曲面状のグラフ彩色問題の解決に大きな進展を与えることが可能であると考えられる。

また Mohar 氏とは、グラフ彩色数の拡張である「グラフ選択数」について継続して研究を行っている。具体的には Thomassen のグラフ彩色に関する深遠な結果「6 彩色に関して臨界的グラフは、有限個しか存在しない」というグラフ彩色に関する定理を、選択数に拡張することを試みている。

4. 研究成果

以下の 4 点について研究成果を得た。

(1) 平面グラフの分割問題とグラフの彩色問題

4 色定理は平面グラフの分割問題でもある。3 閉路も 4 閉路も含まない平面グラフで、同じような分割問題が成り立つか?という問題を Thomassen 氏とともに検討した。その結果「3 閉路も 4 閉路も含まない平面グラフは、独立点集合と林に分割可能である」という定理を導き出すことに成功した。この定理は、有名な Grotzsch の「3 閉路を含まない平面グラフは 3 彩色可能である」とする定理の拡張である。この定理の証明は、多項式時間のアルゴリズムを与える点で多くの研究に影響を与えている。実際、グラフの彩色のみならず分割も与える点において、この定理とそのアルゴリズムは大きなインパクトを与えている。この論文は離散数学の最高峰の雑誌、J. Combin. Theory Ser. B に受理・掲載されている。

(2) 曲面上のグラフの選択数問題

選択数の問題は彩色数の拡張の概念であり、近年多くの研究者から注目を集めている。特に平面グラフでは 4 色定理とは異なり、選択数が 4 にはならない平面グラフが存在し、その場合、選択数が 5 になることが Thomassen により証明されている。申請者と Mohar 氏はこの定理をさらに拡張し、閉曲面上でローカルな平面なグラフでは、選択数が 5 であることを証明した。またさらに証明を拡張し、多

項式時間アルゴリズム的でグラフ彩色と選択彩色を与えることも可能になった。この論文は、2009 年の SODA においても採用されている。

(3) Grotzsch の定理の拡張

Grotzsch の定理とは、平面グラフにおいて、三角形を含まなければ、3 彩色可能であるとする定理である。R. Thomas 氏と Z. Dvorak 氏とともに、この定理の見通しの良い別証明を与え、三角形を含まない平面グラフを 3 彩色する線形時間アルゴリズムを与えた。

(4) グラフ細分を含まないグラフ彩色

グラフ細分に関して閉じているグラフに関するグラフ彩色問題に取り組み、多くの知見を得た。具体的には、 K_t (すなわち t 点の完全グラフ) を細分として含まないグラフ上でのグラフ彩色問題に取り組んだ。その中でも得られた主定理は、このようなグラフは、 t の 2 乗色を彩色数として必要とするかもしれないが、アルゴリズム的には、彩色数 $+3t$ 色のグラフ彩色を、多項式時間で得られることを証明した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 28 件)

1. M. Grohe, K. Kawarabayashi and B. Reed, A Simple Algorithm for the Graph Minor Decomposition - Logic meets Structural Graph Theory, ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, (SODA'13), 414--431. (査読有)
2. K. Kawarabayashi, 5-coloring $K_{\{3,k\}}$ -minor-free graphs, ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, (SODA'13), 985--1003. (査読有)
3. K. Kawarabayashi, Totally odd subdivisions and parity subdivisions: Structures and Coloring, ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, (SODA'13), 1013--1029. (査読有)
4. Z. Dvorak and K. Kawarabayashi, List-coloring embedded graphs,

- ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, (SODA'13), 1004--1012. (査読有)
5. K. Kawarabayashi, M. Král, D. Král and S. Kreutzer, Packing directed cycles through a specified vertex set, ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, (SODA'13), 365-377. (査読有)
 6. K. Kawarabayashi and K. Ozeki, 4-connected projective planar graphs are hamiltonian-connected, ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, (SODA'13), 378--395. (査読有)
 7. K. Kawarabayashi, C. Sommer and M. Thorup, More Compact Oracles for Approximate Distances in Undirected Planar Graphs, ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, (SODA'13), 550--561. (査読有)
 8. K. Kawarabayashi and Y. Kobayashi, An $O(\log n)$ -approximation algorithm for the disjoint paths problem in Eulerian planar graphs, ACM transaction on Algorithms 9 (2013) No. 16. (査読有)
 9. K. Kawarabayashi and K. Ozeki, A simpler proof for the two disjoint odd cycles theorem, J. Combin. Theory, Ser. B 103, 313--319 (2013). (査読有)
 10. K. Kawarabayashi and G. Yu, Connectivities for k -knitted graphs and for minimal counterexamples to Hadwiger's Conjecture, J. Combin. Theory, Ser. B, 103 320--326 (2013). (査読有)
 11. K. Kawarabayashi and Y. Yoshida, Testing subdivision-freeness: property testing meets structural graph theory, the 43rd ACM Symposium on Theory of Computing(STOC 2013), 437--446. (査読有)
 12. N. Kakimura and K. Kawarabayashi, Half-Integral Packing of Odd Cycles through Prescribed Vertices, Combinatorica 33 549-572 (2013) (査読有)
 13. K. Kawarabayashi and Y. Kobayashi, All-or-nothing multicommodity flow problem with bounded fractionality in planar graphs, the 54th Annual Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS 2013), 187--196. (査読有)
 14. R. Hoshino and K. Kawarabayashi, An Approximation Algorithm for the Bipartite Traveling Tournament Problem, Mathematics of Operation Research, 38, 2013, pp. 720-728. (査読有)
 15. K. Eickmeyer, K. Kawarabayashi and S. Kreutzer, Model Checking for Successor-Invariant First-Order Logic on Minor-Closed Graph Classes, Logic in Computer Science(LICS'13), 134-142. (査読有)
 16. K. Kawarabayashi and K. Ozeki, Spanning closed walks and TSP in 3-connected planar graphs, ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, (SODA'12), 671--682. (査読有)
 17. N. Kakimura, K. Kawarabayashi and Y. Kobayashi, Erdos-Posa property and its algorithmic applications --- parity constraints, subset feedback set, and subset packing, ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, (SODA'12), 1726--1826. (査読有)
 18. K. Kawarabayashi and Y. Kobayashi,

- List-Coloring Graphs without Subdivisions and without Immersions, ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, (SODA'12), 1425--1435. (査読有)
19. K. Kawarabayashi and Y. Kobayashi, A Linear Time Algorithm for the Induced Disjoint Paths Problem in Planar Graphs, Journal of Computer and System Sciences, (2012), 670--680. (査読有)
 20. K. Kawarabayashi, Y. Kobayashi and B. Reed, The disjoint paths problem in quadratic time, J. Combin. Theory Ser. B 102 (2012), 424--435. (査読有)
 21. R. Diestel, K. Kawarabayashi and P. Wollan, The Erdos-Posa property for clique minors in highly connected graphs, J. Combin. Theory Ser. B, 102 (2012), 454--469. (査読有)
 22. K. Kawarabayashi and Y. Kobayashi, Linear min-max relation between the treewidth of H-minor-free graphs and its largest grid minor, Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science (STACS), 278--289, 2012. (査読有)
 23. K. Kawarabayashi and Y. Kobayashi, Edge-disjoint Odd Cycles in 4-edge-connected Graphs, Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science (STACS), 206--217, 2012. (査読有)
 24. K. Kawarabayashi, S. Kreutzer and B. Mohar, Linkless and flat embeddings in 3-space, Discrete and Computational Geometry 47, (2012), 731--755 (査読有).
 25. K. Kawarabayashi and Y. Kobayashi, Fixed-parameter tractability for the subset feedback set problem and the S-cycle packing problem, J. Combin. Theory Ser. B 102 (2012), 1020--1034. (査読有)
 26. K. Kawarabayashi and M. Thorup, Combinatorial coloring of 3-colorable graphs, the 53rd Annual Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS 2012) 68--75. (査読有)
 27. R. Diestel, K. Kawarabayashi, T. Muller and P. Wollan, On the excluded minor structure theorem for graphs of large treewidth, J. Combin. Theory Ser. B, 102 1189-1210 (2012). (査読有)
 28. N. Kakimura and K. Kawarabayashi, Packing Directed Circuits through Prescribed Vertices Bounded Fractionally, Siam. J. Discrete Math 26, 1121--1133, (2012). (査読有)
- {学会発表}(計 5件)
1. K. Kawarabayashi: "What makes a 4-edge-connected graph so special?" European Conference on Combinatorics, Graph Theory and Applications. (2011年9月4日). ブダペスト(招待講演)
 2. K. Kawarabayashi: "TSP in minor-closed family of graphs" Japan-Hungary Discrete Mathematics Conference. (2011年5月20日). 京都大学数理解析研究所(招待講演)
 3. K. Kawarabayashi: "Graphs without subdivision" Danish Graph Theory. (2009年11月26日). Copenhagen
 4. K. Kawarabayashi: "The disjoint paths problem, structure and algorithm" Fourth workshop in Graph Classes, Optimization, and Width Parameters, GROW 2009. (2009年10月15日). Bergen
 5. K. Kawarabayashi: "Hadwiger's conjecture is decidable" The 6th Japan-Hungary conference in Discrete Math. (2009年5月16日).

Budapest

〔図書〕(計 1件)

河原林健一、田井中麻都佳著『これも数学
だった!?: カーナビ、路線図、SNS』(丸善
出版, 2013) 208 ページ

〔産業財産権〕
出願状況(計 0件)

取得状況(計 0件)

〔その他〕
ホームページ等
http://research.nii.ac.jp/~k_keniti

6. 研究組織

(1) 研究代表者

河原林 健一 (Ken-ichi Kawarabayashi)
国立情報学研究所・情報学プリンシプル研
究系・教授
研究者番号: 40361159