科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成２５年５月２０日現在

機関番号：14301
研究種目：若手研究（A）
研究期間：2009～2012
課題番号：21684004

研究課題名（和文）　測度同値理論的側面からの離散群の研究

研究課題名（英文）　Research on discrete groups under measure equivalence

研究代表者
木田　良才（YOSHIKATA KIDA）
京都大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：90451517

研究成果の概要（和文）：離散群がカップリングに関して剛性をもつという性質を定式化し、剛性をもつ二つの離散群の融合積がいつ剛性をもつかという問題を解決した。その結果、剛性をもつ新たな離散群を構成し、この群が軌道同型に関して剛性を満たすことを示した。曲面の写像類群の特別な部分群である、トレリ群、ジョンソン核、曲面組みひも群の通約群を計算し、特に、これらの群の任意の自己同型を記述することに成功した。

研究成果の概要（英文）：We introduced coupling rigidity for a discrete countable group, and solved the problem when the amalgamated free product of two discrete countable groups having rigidity has rigidity. As its consequence, we constructed new groups having rigidity, and showed that those groups satisfy rigidity in a sense of orbit equivalence. We computed the abstract commensurators of the Torelli group, the Johnson kernel and the surface braid group, which are special subgroups of the mapping class group of a surface. In particular, we succeeded in describing any automorphism of those groups.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００９年度	1,500,000	450,000	1,950,000
２０１０年度	1,000,000	300,000	1,300,000
２０１１年度	1,100,000	330,000	1,430,000
２０１２年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
総　計	4,600,000	1,380,000	5,980,000

研究分野：群論・エルゴード理論
科研費の分科・細目：数学・大域解析学
キーワード：離散群、軌道同型、測度同値

１．研究開始当初の背景

（１）可算離散群による測度空間への作用やその軌道構造を対象とする軌道同型理論は、１９５０年代頃から本格的な研究が始められたとされる。そのような軌道構造の同型問題は付随するフォン・ノイマン環の同型問題と関連するため、この分野は作用素環論やエルゴード理論の研究者を中心に研究されてきた。この分野における基本的な問題の一つは、どのような二つの群作用が同じ軌道構造をもつかを調べることである。また、与えられた二つの離散群が、軌道同型となるような作用を持ち得るかどうかという問題もまた基本的である。近年、幾何学的群論や組み合わせ群論といった様々な群論における技術がこのような問題に対して有効であることが明らかになってきている。

（２）与えられた可算離散群に対し、その自己同型を調べることは基本的である。その理由は、単に応用があるというだけでなく、自己同型を調べる過程で注目される性質がその群の本質になり得るという点にある。また、モストウ剛性がそうであるように、重要な結果の特殊化が自己同型の計算に帰着する場合も少なくない。群の本質をこのようにして捉えることは軌道同型の剛性問題とも密接に関連するため、与えられた群を軌道同型の観点から調べる際、その群の自己同型を調べることは肝要である。

２．研究の目的

（１）一般に、軌道同型は共役よりもずっと弱く、共役でない二つの作用が軌道同型になることはいくらでもある。過去の研究において、曲面の写像類群が軌道同型の意味で剛性をもつことを示した。これは、写像類群による作用の軌道構造が共役類の情報を失わないということを意味する。このような剛性をもつ群の例は数少ない。本研究の目的の一つは、離散群がどのような状況下で剛性をもち得るのかを理解することであった。剛性を満たす群を具体的に構成し、新たに発見することを目標とした。

（２）曲面の写像類群はトポロジー、幾何学、群論など多くの分野の研究者が興味をもつ対象である。モストウ剛性の証明に倣って、イヴァノフは写像類群の自己同型を計算した。さらにもっと強く、写像類群の通約群が写像類群自身と自然に同型になることを示した。写像類群は特殊な部分群を含んでおり、そのどれもが魅力的である。例えば、トレリ群、ジョンソン核、曲面組みひも群は数多くの研究者によってその実体が明らかにされたが、未知の部分も多い。実際、これらの部分群の自己同型は、いくつかの場合にすでに計算されていたが、多くの場合には手つかずであった。本研究では、これらの自己同型並びに通約群の計算を通して、未知の部分を明らかにすることを目標とした。

３．研究の方法

（１）興味深い性質をもつ群の構成法の一つに、二つの群の融合積をうまくとる方法がある。融合積はツリーに自然に作用することが知られており、この作用の幾何学的な性質を通して融合積を調べることは極めて効果的である。本研究では、二つの剛性をもつ群をどのように融合させれば、その結果できる融合積がまた剛性をもつかという問題に取り組んだ。そのためには、一般に、群が剛性をもつという性質を定式化する必要がある。

群作用の軌道同型の問題は、カップリングと呼ばれる空間の問題と同等であることが知られている。可算離散群 G に対し、G のカップリングとは、直積群 G×G がある性質を満たして作用するような測度空間である。G を格子部分群として含むような位相群は G のカップリングの典型例である。（このような位相群は G の封筒と呼ばれる。）G がうまく表現されるボレル群 H が存在して、G の任意のカップリングに対し、それから H へある性質を満たす写像が存在するとき、G は H に関して剛的であると定義した。この性質は、G の任意の封筒から H への準同型が存在することを保証するものであり、軌道同型に関する剛性を示す上で、重要かつ一般的な視点を与える。

さて、融合積 G の剛性を示すための第一段階は、G がツリーの自己同型群に関して剛的であることを示すことである。このことにより、G のカップリングの中に小さなカップリングを見つけることができ、G の構成要素となる部分群の剛性を適用する舞台が整う。その結果、もし G が通約群に関して剛的な群の融合積であり、いくつかの代数的な性質が満たされるならば、G がその通約群に関して剛的であることが示される。

（２）すでに述べたように、曲面の写像類群の任意の自己同型は内部共役であり、もっと強く、写像類群の通約群は写像類群自身と自然に同型である。この主張は、曲面のカーブ複体の自己同型を計算することに帰着される。より正確には、次の二つのステップを経る。（あ）写像類群の有限指数部分群の間の同型写像はカーブ複体の自己同型を誘導する。（い）カーブ複体の任意の自己同型は写像類群の元から誘導される。（あ）と（い）を合わせると、写像類群の通約群が写像類群自身と自然に同型になることが示される。

一方、写像類群の特殊な部分群（トレリ群、ジョンソン核、曲面組みひも群）に対応して、カーブ複体の類似が定義される。例えば、ジョンソン核の場合、曲面上の分離的曲線のイソトピー類を頂点とするような複体が対応する。（この複体は分離的曲線の複体と呼ばれる。）この対応は、分離的曲線についてのデーンツイストがジョンソン核の自然な生成系であるという事実に基づいている。（あ）に対応して、ジョンソン核の有限指数部分群の間の同型写像は、分離的曲線の複体の自己同型を誘導することが示される。（い）に対応して、分離的曲線の複体の任意の自己同型は写像類群の元から誘導されることが示される。この二つを合わせることにより、ジョンソン核の通約群が写像類群と自然に同型であることが示される。

トレリ群と曲面組みひも群の場合も類似した議論を経ることにより、通約群の計算が可能である。トレリ群の場合は、分離的曲線

に加えて、切断対と呼ばれる曲線の組に対応する頂点を考慮しなければならない。なぜなら、分離的曲線に関するデーンツイストと切断対に対応するツイストがトレリ群の自然な生成系だからである。分離的曲線と切断対を頂点とする複体（トレリ複体）を定義し、この自己同型の計算を経て、トレリ群の通約群が計算される。曲面組みひも群の場合は、種数０の曲面を切り取るような曲線または曲線の組を頂点とする複体を考える。これらの曲線または曲線の組に対応するツイストが曲面組みひも群の自然な生成系だからである。以上に挙げた三つの複体の自己同型の計算は、カーブ複体の自己同型の計算に帰着する形で行われる。

４．研究成果

（１）剛性をもつ二つの群をどのように融合させれば、その結果できる融合積がまた剛性をもつかを明らかにした。例えば、二つの SL(n, Z)の極大放物型部分群上の融合積 G が剛性をもつことを示した。剛性をもつということを正確に述べると、このような融合積による標準確率測度空間への作用で、測度を保存し、エルゴード的かつ自由なものに対し、それが他の離散群によるそのような作用と軌道同型になるならば、その二つの作用は実は共役になるということを証明した。この性質をもつ離散群の例は、曲面の写像類群に続く二例目である。この結果は、剛性をもつ新たな群の例を生み出したことにとどまらず、一般にどのような状況があれば剛性を導くことができるかを明らかにしたという点で重大な意義をもつ。

加えて、軌道同型に関する剛性だけでなく、上記の融合積 G の封筒に関する剛性も得られる。つまり、G の任意の封筒は G とコンパクト群の半直積の形をしていることが示される。

また、写像類群の融合積に関する剛性についても結果を得ることができた。写像類群の二つのコピーをある特別な部分群上で融合させることで得られる融合積を考える。（特別な部分群の例は、擬アノソフ元の正規化群である。）この融合積の確率測度空間への作用で、特別な部分群の作用が混合的になるようなものは上記の剛性を満たすことを示した。融合積の任意の作用が剛性を満たすような特別な部分群がとれるかどうかは未解決であり、今後の課題である。

（２）曲面の写像類群の特別な正規部分群であるトレリ群の通約群について考察した。具体的には、いくつかの例外を除いて、多くの曲面に対し、トレリ群の通約群が写像類群と自然に同型になることを証明した。特に、トレリ群の二つの有限指数部分群の間の同型写像は写像類群の元による共役で与えられることを示した。種数２で境界成分が１個であるような曲面の場合、トレリ複体が１次元であることから、その自己同型の計算は他の場合に比べて非常に困難である。このトレリ複体内の多くのサイクルを詳細に調べることにより、複体の自己同型の計算を完成させたことは大変有意義であった。他にも、写像類群の正規部分群であるジョンソン核や曲面組みひも群についても同様の主張を証明した。

さらに、トレリ群からそれ自身への単射準同型についても考察した。このような準同型は、トレリ複体からそれ自身への単体写像で超単射的と呼ばれる性質を満たすものを誘導する。このような単体写像が実は全射になることを証明した。これにより、任意の超単射的単体写像は同型写像であることが従い、写像類群の元から誘導されることが従う。よって、トレリ群からそれ自身への任意の単射準同型は写像類群の元による共役で与えられる。特に、トレリ群の任意の有限指数部分群は双対ホップ的と呼ばれる性質を満たすことがわかる。つまり、そのような群からそれ自身への単射準同型は全射となる。トレリ群だけでなく、ジョンソン核や曲面組みひも群に対してもこれらの性質を示すことができた。

（３）組み合わせ群論の重要な研究対象にバウムスラッグ・ソリター群（BS 群）と呼ばれる群がある。BS 群は０でない整数 p、q に対して定義され、二つの生成元 a、t をもち、a の p 乗の t による共役が a の q 乗に等しいという唯一の関係式をもつ。この群はその定義から HNN 拡大の形をしており、ツリーへの作用をもつ。ツリーの理論の観点に立つと、HNN 拡大は融合積と並び、群の基本的な構成法であると考えられる。（１）での融合積を取り扱う手法が、この HNN 拡大についても適用できることを明らかにした。具体的には、BS 群が実数群に関して剛性を満たすことを示した。ここで、BS 群の実数群への表現は、BS 群の各元に対し、それによる共役が a で生成される巡回群をどれだけねじるかをはかることにより定義される。一方、BS 群による確率測度空間への作用から流れ（つまり、実数群による確率測度空間への作用）が定義される。上記の剛性を用いると、この流れの共役類が BS 群の作用の軌道同型不変量になることが示される。このような不変量の構成法は、非従順群による保測作用については今まで見られなかったものであり、興味深い。また、この不変量の構成法は、III 型作用に付随する流れが軌道同型不変量になるという事実に触発されたものであり、このような III 型理論との同調性もまた興味深い。しかし、課

題も残っている。整数 p、q を変化させたとき、対応する BS 群が軌道同型になるかどうかという問題は基本的である。残念ながら、上記の流れの共役類だけではこの問題を解決することはできない。

BS 群の著しい性質の一つに、正規ではないが擬正規である無限従順部分群を含んでいるという性質がある。これまでの研究において、一般に、正規化群が非従順になるような無限従順部分群は、作用の軌道構造を知る上で多くの役割を担ってきた。そこで、BS 群は正規な無限従順部分群を含まないが、そのような部分群を含む群と軌道同型になるかどうかが問題となる。すでに述べたように、BS 群は擬正規な無限従順部分群を含むので、この問題は非常にデリケートである。本研究では、この問題を次の形で解決した。BS 群は安定的な作用をもつ。つまり、その作用の軌道同値関係が、それ自身とエルゴード的概有限同値関係との直積と同型になる。特に、BS 群はそれ自身と整数群との直積と測度同値になる。二つの非従順群が測度同値になるというタイプの結果は、近年の剛性に関する研究とは全く趣を異にするものであり、今後の新たな研究の指針を与えるものと期待している。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計６件）

①Yoshikata Kida, Stability in orbit equivalence for Baumslag-Solitar groups and Vaes groups, to appear in Groups Geom. Dyn. 査読有.

②Yoshikata Kida, The co-Hopfian property of the Johnson kernel and the Torelli group, to appear in Osaka J. Math. 査読有.

③Yoshikata Kida, Examples of amalgamated free products and coupling rigidity, Ergodic Theory Dynam. Systems 33 (2013), 499-528. 査読有.
DOI:10.1017/S0143385711000964

④Yoshikata Kida, Saeko Yamagata Commensurators of surface braid groups, J. Math. Soc. Japan 63 (2011), 1391-1435. 査読有.
DOI:10.2969/jmsj/06341391

⑤Yoshikata Kida, Automorphisms of the Torelli complex and the complex of separating curves, J. Math. Soc. Japan 63 (2011), 363-417. 査読有.
DOI:10.2969/jmsj/06320363

⑥Yoshikata Kida, Rigidity of amalgamated free products in measure equivalence, J. Topol. 4 (2011), 687-735. 査読有.
DOI:10.1112/jtopol/jtr012

〔学会発表〕（計１５件）

①Yoshikata Kida, Rigidity aspects in measure equivalence for groups, Gˆ3 conferenece, Travelodge South Padre Island（アメリカ), 2013 年 3 月 21 日.

②木田良才, Baumslag-Solitar群とVaes群の軌道同型安定性, 作用素環論の最近の発展と関連する話題について, 京都大学数理解析研究所, 2012 年 9 月 24 日.

③木田良才, Mackeyの仮想群と写像類群の軌道同型に関する剛性, 力学系とその周辺分野の研究, 京都大学数理解析研究所, 2012 年 7 月 12 日.

④Yoshikata Kida, Invariants of orbit equivalence relations and Baumslag-Solitar groups, Geometry and Analysis on Discrete Groups, Toba Seaside Hotel, 2012 年 6 月 14 日.

⑤Yoshikata Kida, Stability in orbit equivalence for Baumslag-Solitar groups, Conference on Geometry, RIMS, Kyoto University, 2012 年 6 月 1 日.

⑥Yoshikata Kida, Stability in orbit equivalence for Baumslag-Solitar groups and Vaes groups, Von Neumann Algebras and Ergodic Theory, UCLA（アメリカ), 2012 年 5 月 26 日.

⑦Yoshikata Kida, Invariants for orbit equivalence relations of Baumslag-Solitar groups, Conference on von Neumann Algebras and Related Topics, RIMS, Kyoto University, 2012 年 1 月 10 日.

⑧Yoshikata Kida, Measure equivalence rigidity and abstract commensurators of groups, 離散群と双曲空間の解析と幾何, 京都大学数理解析研究所, 2011 年 12 月 12 日.

⑨Yoshikata Kida, Rigidity of amalgamated free products in measure equivalence, Geometric and measured group theory, Institut Henri Poincaré（フランス), 2011 年 7 月 6 日.

⑩ Yoshikata Kida, Measure equivalence rigidity of amalgamated free products, Geometry and Analysis, Kyoto University, 2011年3月9日.

⑪ Yoshikata Kida, Automorphisms of the complex of separating curves and the Torelli complex, Teichmüller Theory, Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach（ドイツ), 2010年12月1日.

⑫ Yoshikata Kida, Measure equivalence rigidity of amalgamated free products, AMS Fall Western Section Meeting, UCLA（アメリカ), 2010年10月10日.

⑬木田良才, Torelli 複体と分離的曲線の複体の自己同型について, リーマン面に関連する位相幾何学, 東京大学, 2010年9月6日.

⑭ Yoshikata Kida, Measure equivalence rigidity of amalgamated free products, Rigidity in cohomology, K-theory, geometry and ergodic theory, Hausdorff Research Institute for Mathematics（ドイツ), 2009年11月26日.

⑮ Yoshikata Kida, Measure equivalence rigidity of amalagamated free products, The XXIst Rolf Nevanlinna Colloquium, Kyoto University, 2009年9月11日.

〔その他〕
ホームページ等
http://www.math.kyoto-u.ac.jp/~kida

６．研究組織
(1)研究代表者
木田　良才（YOSHIKATA KIDA)
京都大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：90451517