

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成25年 5月31日現在

機関番号：14401

研究種目：若手研究（A）

研究期間：2009～2012

課題番号：21686039

研究課題名（和文） 確率制御の新展開：レヴィ過程の制御と数理ファイナンスへの応用

研究課題名（英文） Stochastic control of Levy driven processes with application to mathematical finance

研究代表者

加嶋 健司 (KASHIMA KENJI)

大阪大学・基礎工学研究科・准教授

研究者番号：60401551

研究成果の概要(和文):さまざまな実用的な応用例をもつ、レヴィ過程の弱近似問題に対して、モンテカルロ法などの標本経路の発生を必要とせず、多項式最適化を解くことで厳密な上下界を計算する手法を提案・改良した。またこれらの結果を数理ファイナンスにおけるオプション価格付けなどに適用し、その有効性を検証した。さらに、大規模複雑系上の合意ダイナミクスの確率雑音に対する頑強性など、確率システムの解析・制御に関するいくつかの理論結果も導出した。

研究成果の概要(英文): We proposed an optimization approach to weak approximation of Levy-driven stochastic differential equations, which is a general form of many practical applications. We employ a mathematical programming framework to obtain numerically upper and lower bound estimates of the target. An advantage of our approach is that we do need no sample path generation. The effectiveness was verified through an application to mathematical finance. We also investigated analysis/design of stochastic control systems from various aspects, such as robustness of consensus dynamics over large-scale complex networks under stochastic noise.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	3,400,000	1,020,000	4,420,000
2010年度	3,000,000	900,000	3,900,000
2011年度	2,900,000	870,000	3,770,000
2012年度	3,100,000	930,000	4,030,000
年度			
総計	12,400,000	3,720,000	16,120,000

研究分野：工学

科研費の分科・細目：電気電子工学・制御工学

キーワード：確率制御、レヴィ過程、数理ファイナンス、システムバイオロジ、最適化、大規模複雑系

1. 研究開始当初の背景

近年、様々な分野において確定的なモデルでは表現できない確率的な挙動に対する解析・制御手法の重要性が増している。中でも、

物理システムの故障をはじめとして、金融工学における株価モデルなどでは、系の急激な変動の影響が大きな意味をもつ。また、生化学反応下における各物質の分子数の時間発展の記述には、整数値をとる確率過程が用い

られるが、こうした離散値性も注意深く取り扱われなければならない。しかしながら、これまでのシステム制御分野の研究では、白色雑音の議論にもとづくいわば滑らかな不確実性のみが対象とされることが多く、こうした軌道の不連続性を有する確率システムの解析・制御のための理論的枠組みおよび実用的なツールの開発は十分とは言えない。

2. 研究の目的

本研究では、前項で述べた経路の不連続性を有する確率的現象を統一的に扱うことができるレヴィ過程（およびそれに駆動される確率過程）を数学モデルとして採用し、制御理論的な枠組みを構築する。また理論結果を数理ファイナンスのオプションの価格付け等の現実的な問題に適用し、実用レベルでの有効性を検証する。

- (1) 離散変動を有する確率システムの解析／制御理論の構築：システム制御の諸概念をレヴィ過程の場合に拡張した後に、制御手法を確立する。
- (2) 数理ファイナンス等への応用：オプションの価格付けなど実用性を踏まえた問題を設定し、達成度を定量的に評価する。また同様に確率的な振る舞いが重要なシステムバイオロジに対しても、応用可能性を検討する。

3. 研究の方法

本研究の遂行においては、レヴィ過程の弱近似問題を本研究課題の理論的基礎と位置づけた。この問題は、確率過程に対して、モーメント計算、期待効用の計算、生存確率の見積もり、オプションの価格付けなど実用的に重要な問題を統一的に定式化できる。この問題に対する一般的な手法は標本経路生成にもとづくモンテカルロ法であるが、本研究では、まず、標本生成を必要としない、数理計画問題にもとづく手法を提案・改良する。その後、数理ファイナンス、システムバイオロジなどの分野の実際の問題に対して適用し、その有効性の検討と手法の改良を並行しておこなう。

レヴィ型の確率過程の扱いはこれまでのシステム制御理論で扱われてきた確率システムと比較して、数値シミュレーションすら困難なモデルも多く存在し、非常に高度な数学が必要となる。そこで、確率論の専門家でありレヴィ過程に関する研究も多くおこなっている河合玲一郎氏との協力のもと研究をすすめた。また、河合氏はファイナンス分野

における実務経験を有しており、この分野での応用的な問題設定の実用性を吟味する上でも非常に有益な助言を得た。また、他の応用として、井村順一教授と連携し、システムバイオロジにおける確率的挙動のモデリング・解析・制御の研究を進めた。ここでは井村教授から制御理論の視点からのシステムバイオロジに関する助言をうけ、現実と乖離していないツールの開発をおこなうことに留意した。

成果発表に関しては、上で述べた通り分野横断的に研究を遂行する必要があるため、システム制御・最適化・確率論・物理など、幅広い分野に対して成果を発表していく。

4. 研究成果

まずは本研究課題の理論的基礎と位置づけているレヴィ過程の弱近似問題に対し、準備段階で得られていた結果をもとに、

1. パラメトリックな近似手法、
2. 指数減衰型多項式最適化手法

を新たに提案した。まず1.の実用的な意義として、例えばオプションの価格付けに適用した場合、行使価格や行使時期などに対してパラメトリックな形で価格の上下界が得られる（後出の例も参照）。この結果は計算時間を軽減することに役立つのみでなく、キャリブレーションへの応用においても、重要であると考えられる。また、2.を生存確率推定問題に適用し、特に生存確率が極めて大きい（1に近い）希少事象の検出の場合などモンテカルロ法では困難であることが知られている状況においても、現実的な計算時間でかつ優れた精度で所望の値が求められることを確認した。さらに、これらの手法を補完する手法として、

3. サンプル値制御理論にもとづく重み関数変換法

を提案し、その有効性を検証した（本結果は2011年度システム制御情報学会 学会賞論文賞を受賞）。また並行して、ジャンプなど離散的な要素も含む確率システムの制御問題に対しても、リアプノフ関数にもとづく手法を提案した。

具体例として、数理ファイナンスにおけるバスケットオプションの価格付け問題に適用した例を示す。資産モデルとしては、multi-asset Black-Scholes モデルとした。このとき提案手法により図1のような結果を得ることができる。この図において横軸はオプション行使時刻、縦軸はこのオプションの価格をそれぞれあらわす。2本の曲線は、得られた上下界を示している。この例においては、行使時期に伴ってオプション価格がど

のように変化するか、高精度で見積もることができる。

また、数理ファイナンスと並ぶもう一つの主要応用先と定めているシステムバイオロジにおいては、生体などにおける化学反応の確率的挙動を記述するための標準的な枠組みである Chemical Master Equation を対象として、その低次元化手法を提案した。一方で、本課題を進める中で、本研究で焦点をあてている離散的な不確定性の重要性とともに、ミクロスケールで印加されるノイズがマクロな挙動に及ぼす影響の理論的考察、大規模動的システムにおける確率的現象の重要性を認識した。これを受け、ランダムグラフを用いて相互作用構造が記述される複雑ネットワークにおいて、エージェントレベルで印加されるノイズが全体の合意を乱す度合いを、システム制御理論的手法により計算する手法を提案した。

これらの結果は当初の計画通り、制御・確率過程・数値計算、最適化・物理など横断的に発信し、各分野において国際論文誌に採択された。

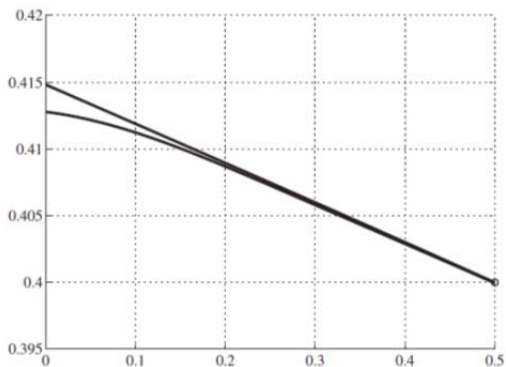


図 1. バスケットオプションの価格付け

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 6 件)

- ① Kenji Kashima, Yutaka Takahashi, Jun-ichi Imura, “On the convergence rate of diffusion in the bidirectional Erdős-Rényi networks: an H^2 -norm perspective,” to appear in Physica A. (査読有)
- ② Kenji Kashima, Reiichiro Kawai, “On weak approximation of stochastic differential equations through hard bounds by mathematical

programming,” SIAM Journal on Scientific Computing, Vol. 35, Issue 1, pp. A1/A21, 2013 (査読有)

- ③ 加嶋健司, “サンプル値 H^2 信号復元にもとづくレビー過程の弱近似,” システム制御情報学会論文誌, Vol. 24, Issue 10, pp. 241/249, 2011 (査読有)
- ④ Kenji Kashima, Yasuyuki Kawamura, Jun-ichi Imura, “Oscillation analysis of linearly coupled piecewise affine systems: application to spatio-temporal neuron dynamics,” Automatica, Vol. 47, Issue 6, pp. 1249/1254, 2011 (査読有)
- ⑤ Kenji Kashima, Reiichiro Kawai, “A weak approximation of stochastic differential equations with jumps through tempered polynomial optimization,” Stochastic Models, Vol. 27, Issue 1, pp. 26/49, 2011 (査読有)
- ⑥ Kenji Kashima, Reiichiro Kawai, “An optimization approach to weak approximation of stochastic differential equations with jumps,” Applied Numerical Mathematics, Vol. 61, Issue 5, pp. 641/650, 2011 (査読有)

[学会発表] (計 12 件)

- ① Takayuki Ishizaki, Kenji Kashima, Antoine Girard, Jun-ichi Imura, Luonan Chen, Kauzyuki Aihara, “Clustering-based H^2 -state aggregation of positive networks and its application to reduction of chemical master equation,” 51th IEEE Conf. Decision and Control (CDC), pp. 4175/4180, 2012 (査読有)
- ② 加嶋健司, “動的システムの空間構造: 均質性とスケーラビリティ,” 第 12 回制御部門大会, パイオニア賞受賞記念講演, 奈良, 2012 (招待講演)
- ③ Kenji Kashima, Antonis Papachristodoulou, Frank Allgöwer, A linear multi-agent systems approach to diffusively coupled piecewise affine systems: delay robustness,” 2011 IEEE Conf. Decision and Control (CDC), pp. 603/608, 2011 (査読有)

- ④ Kenji Kashima, Antonis Papachristodoulou, Frank Allgöwer, Connection profile robustness in a heterogeneous network of piecewise affine FitzHugh-Nagumo models,” SICE Annual Conf. 2011, pp. 2093/2098, 2011 (査読有)
- ⑤ Kenji Kashima, “Smith-Predictor type Structure for a Class of Infinite-Dimensional Systems: Optimal Control and Performance Limitation Formula,” Semi-Plenary Talk in 19th. Int’l Symp. on Mathematical Theory of Networks and Systems (MTNS), Budapest, Hungary, 2010 (招待講演)
- ⑥ Kenji Kashima, Reiichiro Kawai, “An optimization approach to weak approximation of Lévy-driven stochastic differential equations with application to option pricing,” 48th IEEE Conf. Decision and Control (CDC), 3673/3678, 2009 (査読有)

[その他]

解説記事

- ① 大木健太郎, 加嶋健司 “確率的な現象とその多様な捉え方,” 計測と制御, 採録決定, 2013
- ② 加嶋健司, 河合玲一郎 “レビー過程 - 白色雑音の一般化,” システム / 制御 / 情報, Vol. 55, Issue 12, pp. 505/512, 2011

6. 研究組織

(1) 研究代表者

加嶋 健司 (KASHIMA KENJI)
大阪大学・基礎工学研究科・准教授
研究者番号：60401551

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

なし

(4) 研究協力者

河合 玲一郎 (KAWAI REIICHIRO)
英国・レスター大学・数学科

井村 順一 (IMURA JUN-ICHI)
東京工業大学・情報理工学研究科・教授