

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年6月8日現在

機関番号：15201

研究種目：若手研究（B）

研究期間：2009～2011

課題番号：21700002

研究課題名（和文） 否定素子数が制限された論理回路の計算量に関する研究

研究課題名（英文） A Study on the Complexity of Negation-Limited Boolean Circuits

研究代表者

森住 大樹（MORIZUMI HIROKI）

島根大学・総合理工学部・助教

研究者番号：50463782

研究成果の概要（和文）：論理積素子，論理和素子，否定素子から構成される論理回路に対し，否定素子の個数を制限する場合の各種計算量について研究を行った．主な研究成果としては，ある論理関数を計算するために最低限必要となる否定素子の個数を意味する反転計算量が，論理式，非決定性論理回路，確率論理回路の場合にどのようなようになるかを示した．本研究では，計算機が行う計算の数学的モデルとして論理回路をとらえており，計算量理論の立場から研究を実施した．

研究成果の概要（英文）：We investigated the complexity of Boolean circuits which consist of AND gates, OR gates and Negation gates for the case that the number of Negation gates is restricted. We mainly obtained results on the inversion complexity, which is the minimum number of Negation gates to compute a Boolean function, for formulas, non-deterministic circuits and probabilistic circuits. In this study, Boolean circuits are considered as a mathematical model of computation, and we studied it from the viewpoint of the computational complexity theory.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2010年度	700,000	210,000	910,000
年度			
年度			
年度			
総計	1,700,000	510,000	2,210,000

研究分野：理論計算機科学

科研費の分科・細目：情報学，情報学基礎

キーワード：計算量理論，回路計算量，論理回路，否定数限定回路

## 1. 研究開始当初の背景

計算機の進歩とともに計算機を活用して問題を解くことが広く行われるようになり多くのアルゴリズムが開発されているが，その一方，問題の本質的な難しさについては，P対NP問題をはじめとして解明されていない事が多く残されている．回路計算量の研

究では，論理回路をチューリング機械と同様に計算機が行う計算の数学的モデルとしてとらえ，その素子数や段数などを基準として問題の難しさを議論する．素子数や段数の下限を得ることは，問題の難しさを数学的に証明したことを意味する．

回路計算量は1980年代ごろ，P対NP問題を解決するための有力な手段として盛ん

に研究されるようになった。P対NP問題は理論計算機科学における最大の未解決問題の一つであり、2000年にクレイ数学研究所により、リーマン予想などととも7つの数学の未解決問題の一つとして解決に対して多額の懸賞金が懸けられたことで、より広くその重要性が知られるようになった。NPに属する一つの問題を計算する論理回路を構成するために入力サイズに対して多項式個を越える素子が必要であることが証明されれば、 $P \neq NP$ を示したことになる。P対NP問題は解決される。よって、素子数の下限を示すことが回路計算量における最大の目標であり、同時に最も困難な目標でもある。P対NP問題に限らず問題の難しさを議論する手段として回路計算量はしばしば有効に活用されている。

特に制限のない回路の素子数の下限を証明することは現状困難であり大きな課題となっている。一方、否定素子の使用を禁止した単調回路と呼ばれるモデルでは、指数個の素子数の下限が証明されている。そこで、否定素子の使用が論理回路の構成に与える効果を解明するために、否定素子の使用を一定の数に制限した論理回路が1990年代以降盛んに研究されている状況にあった。

## 2. 研究の目的

回路計算量の研究においては、その目的に応じて、一般の回路、論理式、定数段数回路など様々な論理回路モデルが対象となる。否定素子の個数を制限した場合の回路計算量は、これまで主に最も基本的である一般の回路を対象として議論されてきた。本研究では、一般の回路以外の論理回路モデルに対して否定素子の個数を制限した場合を考え、否定素子の働き、さらには回路計算量の解明を進めることを主な目的とした。否定素子数を制限した一般の回路においてこれまで積み重ねられてきた研究成果を、本研究で対象とする論理回路モデルに応用することで、効果的な研究の進展が期待できると考え、研究を実施した。

## 3. 研究の方法

否定素子数が制限された論理回路について考える場合、まず第一に、ある論理関数が制限された否定素子数の論理回路で計算可能であるか否かということが問題となる。そこで、ある論理関数を計算するために最低限必要となる否定素子の個数を意味する反転計算量を研究対象の中心として、研究を実施した。

6の研究組織にも記載の通り、研究分担者や連携研究者は特におらず研究代表者のみによる研究実施が中心であったが、その都度、共同研究者との研究や、学会発表等で他の研究者の意見を取り入れながら研究を進めた。理論的な研究であり、実験やシミュレーション等は行わず、過去に判明している事実を文献で調査し新たな事実を導き出すというのが、基本的な研究方法となる。

## 4. 研究成果

主な研究成果として、ある論理関数を計算するために最低限必要となる否定素子の個数を意味する反転計算量が、論理式、非決定性論理回路、確率論理回路の場合にどのようになるかを示した。それぞれ(1)、(2)、(3)で詳細を記載する。ただし、(1)には反転計算量以外の成果も含めている。それ以外の主な成果は(4)、(5)に記載する。

(1)、(2)、(4)に記す研究成果とそれを掲載した論文は、2012年に出版された、論理関数に関する計算量の図書 Boolean Function Complexity: Advances and Frontiers (著者 Stasys Jukna, Springer-Verlag) に取り上げられた。特に(1)については、10.3節の“Formulas Require Exponentially More NOT Gates”の本文の中で証明等も含めて取り上げられた。上記の図書は、回路計算量の近年の成果がまとめられたものとしては代表的な図書であり、本研究の研究成果が国際的な回路計算量の研究にいくらかの影響を与えることができたものと考えている。

(1) ファンアウトが1に制限された論理回路に相当する論理式に対して否定素子数を制限した場合を考え、反転計算量を調べた。否定素子が論理式の任意の位置に使用可能な場合については、反転計算量を完全に特定した。否定標準形論理式に相当する、否定素子が論理式の入力位置にのみ使用可能な場合については、反転計算量の上界を示したが、未解決の問題も残されている。また、否定素子数が制限された場合と制限されない場合のそれぞれの論理式の素子数の関係を表す式を得た。論理式は、並列計算時間との密接な関係から回路計算量の研究において重要かつ広く研究されている論理回路モデルの一つである。また、論理関数を記述するためなどによく用いられる論理式そのものでもあるため、その視点から考えても本成果は意義があると言える。以上の研究成果は、欧州における理論計算機科学に関する主要な国際会議の一つである2009年のICALP (International Colloquium on Automata,

Languages and Programming) に採録され発表を行った。

(2) 一般の回路が決定性の計算を行うのに対し、非決定性回路は一言でいうと非決定性の計算を行う論理回路である。非決定性の計算は通常の入力とは別の推測入力によって表され、回路自体は一般の回路と同様に論理積素子、論理和素子、否定素子から構成される。非決定性回路において否定素子数を制限した場合を考え、反転計算量は0または1である、つまり、たかだか1つの否定素子ですべての論理関数が計算可能であることを証明した。これは、非決定性の計算能力により反転計算量が著しく減少することを意味する。また、推測入力のビット数による反転計算量の変化も完全に特定した。以上の研究成果は査読付き学術雑誌 Theoretical Computer Science に掲載された。

(3) 一般の回路が決定性の計算を行うのに対し、確率回路は一言でいうと確率的計算を行う論理回路である。確率的計算は通常の入力とは別のランダム入力によって表され、回路自体は一般の回路と同様に論理積素子、論理和素子、否定素子から構成される。確率回路において否定素子数を制限した場合を考え、反転計算量が一般の回路と比較してわずかしこ減少しないことを証明した。この成果は、上記(2)の非決定性の計算を行う非決定性回路では一般の回路に比べ反転計算量が著しく減少することと合わせて考えると、確率回路と非決定性回路の極めて異なる状況を示すものである。決定性、非決定性、確率のそれぞれの計算の比較は、回路計算量に限らず計算量理論の分野の様々な場合で行われ、課題となっていることである。以上の研究成果は2011年度冬のLAシンポジウムにおいて発表した。(2)の非決定性回路と比べると反転計算量の完全な特定には至っておらず、さらなる進展も含め、今後、学術雑誌において発表することを目指している。

(4) 反転回路は入力された0と1をそれぞれ1と0に反転する回路である。反転回路を1つ使用すれば、他は否定素子を使用せずにすべての論理関数を計算可能であることなどから、反転回路は否定素子数を制限した場合を考える際には基本的な回路であり、少ない否定素子数で効率よく構成することが研究対象とされてきた。これまでの構成方法はすべて線形サイズを超える素子数を必要としていたが、本研究では否定素子数と段数を少々多く必要とする代わりに初めて線形サ

イズの素子数で構成可能な方法を提案した。以上の研究成果は査読付き学術雑誌 IEICE Transactions on Information and Systems に掲載された。

(5) 要求された計算を行う論理積素子のみから構成される論理回路を最小化する問題について研究を行った。出力が複数の場合、否定素子や他の素子を含まず論理積素子のみから構成される回路であっても、最小化することはNP困難な問題であることが知られている。この問題に対し、集合被覆問題に対するアルゴリズムを利用する手法により、既存のアルゴリズムより近似度が優れた近似アルゴリズムを提案した。以上の研究成果は査読付き学術雑誌 Information Processing Letters に掲載された。

以上、本研究の主な成果について述べたが、(1)の成果は国外の研究グループに影響を与え、平面回路と木幅限定回路の反転計算量の研究へと展開している。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計4件)

- ① Hiroki Morizumi, Improved Approximation Algorithms for Minimum AND-Circuits Problem via k-Set Cover, Information Processing Letters, vol. 111, no. 5, pp. 218-221, 2011, 査読有  
DOI:10.1016/j.ipl.2010.11.019
- ② Hiroki Morizumi and Genki Suzuki, Negation-Limited Inverters of Linear Size, IEICE Transactions on Information and Systems, vol. E93-D, no. 2, pp. 257-262, 2010, 査読有  
DOI: 10.1587/transinf.E93.D.257
- ③ Hiroki Morizumi, Limiting Negations in Non-Deterministic Circuits, Theoretical Computer Science, vol. 410, no. 38-40, pp. 3988-3994, 2009, 査読有  
DOI: 10.1016/j.tcs.2009.05.018
- ④ Kazuo Iwama, Hiroki Morizumi and Jun Tarui, Negation-Limited Complexity of Parity and Inverters, Algorithmica,

vol. 54, no. 2, pp. 256-267, 2009,  
査読有  
DOI: 10.1007/s00453-007-9135-1

〔学会発表〕 (計 2 件)

- ① 森住 大樹, Limiting Negations in Probabilistic Circuits, 2011 年度 冬の LA シンポジウム, 2012 年 1 月 31 日, 京都大学 (京都府)
- ② Hiroki Morizumi, Limiting Negations in Formulas, the 36th International Colloquium on Automata, Languages and Programming, 2009 年 7 月 9 日, ロードス (ギリシャ)

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

森住 大樹 (MORIZUMI HIROKI)  
島根大学・総合理工学部・助教  
研究者番号: 50463782

### (2) 研究分担者

なし

### (3) 連携研究者

なし