

機関番号：20103

研究種目：若手研究（B）

研究期間：2009～2010

課題番号：21700256

研究課題名（和文） 整数演算に基づくカオス写像の真軌道生成法の確立

研究課題名（英文） Realization of True Orbit Computation Using Integer Arithmetic

研究代表者

斉藤 朝輝（SAITO ASAKI）

公立はこだて未来大学・システム情報科学部・准教授

研究者番号：60344040

研究成果の概要（和文）：コンピュータを使ったシミュレーションは、科学の発展に欠かせないだけでなく、工業製品の設計や天気予報・自然災害の予知などで幅広く使われており、現代社会を支える基盤技術となっています。この研究課題では、コンピュータで正確に実行できる整数演算のみを使って、数値誤差の入らない新しいシミュレーション方法を構築しました。さらに、この方法を使って簡単な物理系のシミュレーションを行い、実際にこの方法が有効であることを確認しました。

研究成果の概要（英文）：Computer simulation is not only indispensable for the development of modern science, but also widely used in many areas, for example, for developing industrial products, forecasting weather as well as predicting natural disasters. In this study, we developed a new method that allows us to perform accurate simulations. The novelty of this method is that it incorporates integer arithmetic, to avoid numerical errors. Moreover, we applied this method to simulations of simple physical systems, and verified the validity of the method.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2010年度	500,000	150,000	650,000
年度			
年度			
年度			
総計	1,700,000	510,000	2,210,000

研究分野：非線形科学

科研費の分科・細目：情報学・感性情報学・ソフトコンピューティング

キーワード：カオス、シミュレーション

1. 研究開始当初の背景

カオス現象は、自然科学や工学に限らず、社会科学をも含む広範な分野の対象で現れ、今日それらの研究にはデジタルコンピュータを使ったシミュレーションが欠かせないものとなっている。シミュレーションの正確さが、そのような研究の正当性を左右する重要な要素となるが、その一方で、計算機を使って、誤差のない、真のカオス軌道を生成するのが

非常に困難であることもよく知られている。この理由として、離散時間力学系を考える場合には、以下の2点が挙げられる。

- (1) 数値計算で通常使用されている倍精度浮動小数点数のような固定精度の数の表現を使用すると、丸め誤差が入るため、真のカオス軌道を生成することはできない。また、固定精度（固定ビット長）のため、表現できる数の集合が有限とな

り、原理的には軌道が最終的に周期的になる。これらの点から、固定精度の数表現は、そもそもカオスの基本的な性質（初期値鋭敏性や非周期性）と相容れないと言える。それでも、通常、系の巨視的・定性的な性質は保たれるという想定のもと、浮動小数点数を用いたカオス現象のシミュレーションが広く行われている。しかしながら、例えば、open flow system のように、固定精度の数表現の使用が、系の巨視的・定性的な性質まで壊してしまう（本来の系にはない人工的挙動が現れる）例も知られている。[Kaneko, 1985]、[Yamaguchi, 1997]。

(2) 計算機は整数演算（よって有理数の四則演算）を誤差なしで実行することができる。数の表現として有理数、写像として有理数の四則演算のみで構成されている写像（例えば有理数パラメータのロジスティック写像）を選ぶことにより、原理的には誤差なしの真軌道を生成することができる（初期値も有理数にとる）。本研究課題開始以前にも、研究代表者はこの方針のもとに、真軌道の生成に関する研究を行った [Saito, 2006]。しかし、この場合にも、次の問題点があることがわかっている。

- ① ロジスティック写像のように変数同士の積を含む写像では、変数の分母分子の桁数が急速に巨大になり（ステップ数に対して桁数が指数関数的に増加）、数十ステップ程度しか真軌道を生成することができない。
- ② 区分的線形写像や区分的一次分数写像のような変数同士の積を含まない写像では上で述べた計算コストの問題は起きないが、特殊な（典型的でない）真軌道しか生成できないという危険性がある（例えば、ベルヌイ写像では初期値を有理数にとると軌道は最終的に周期的になる）。

以上より、変数同士の積を含まない区分的一次分数写像（区分的線形写像を含む）では、整数演算を用いた真軌道の生成が期待できるが、その場合にも、数の表現として有理数表現が不適切であることがわかる。この点をふまえて行った、本研究課題の予備的研究では、以下の2つの結果を得ている。

- i 数として3次無理数を用いて、1次元の区分的一次分数写像の真軌道を生成することに成功した [Saito, 2008]。
- ii 区分的一次分数写像の真軌道生成に使用できる数表現は、3次無理数以外にも多数存在し、その中には、3次無理数を使う方法よりも容易に真軌道を生成で

きるものもあることがわかった。

予備的研究では1次元の離散時間力学系の真軌道の生成しか行っていないが、区分的一次分数写像の場合と区分的線形写像の場合とは困難さが異なることが予想されるものの、より高次元の離散時間力学系に対しても、整数演算に基づく真軌道の生成法が確立できると期待できる。

なお、この方法は、通常のカオス力学系だけでなく、例えば $1/f$ スペクトルを示すような、通常のカオスとは異なる特異な力学系の軌道生成にも極めて有効なことが、予備的研究から明らかになっている。

参考文献：

- [Kaneko, 1985] K. Kaneko, Phys. Lett. A 111, 321 (1985).
[Yamaguchi, 1997] A. Yamaguchi, Int. J. Bifurcat. Chaos 7, 1529 (1997).
[Saito, 2006] A. Saito, Prog. Theor. Phys. Suppl. 161, 328 (2006).
[Saito, 2008] A. Saito and S. Ito, Book of Abst.: DDAP 5, 130 (2008).

2. 研究の目的

研究の全体構想としては、区分的一次分数写像（区分的線形写像を含む）の真軌道生成法を、一般の次元の場合も含めて、確立することを目指している。さらに、この方法を基に、真軌道を使った誤差なしのシミュレーションによるカオス現象の解析や、将来的には真軌道のカオス情報通信（暗号通信など）への活用も、目指している。

このような全体構想の第一歩として、本研究課題では、区分的一次分数写像に関しては2次元まで、区分的線形写像に関しては一般の次元まで、整数演算に基づく真軌道の生成法を確立することを、当初の目的としていた。特に、本研究課題では真軌道生成法を理論的に構成するだけでなく、実際にこの方法が有効であることを、物理的に意味のある系（2次元近可積分系など）に適用して確認することも、目的としていた。

さらに、この方法によって最も研究の発展が期待できる対象である、通常のカオスとは異なる特異性を示す力学系（学習・適応制御系など）の研究を併せて行うことも、目的としていた。

3. 研究の方法

- (1) 2次元区分的線形写像の真軌道生成：
2次元区分的線形写像の真軌道生成法を構築する上で必要となる、数表現および区間（領域）の判定法の検討を行った。また、構築した真軌道生成方法の有効性

を、2次元区分的線形写像としてよく知られているアーノルドの猫写像などで確認した。

(2) 2次元区分的一次分数写像の真軌道生成:

2次元区分的線形写像の真軌道生成法を、2次元区分的一次分数写像の場合に拡張した。

また、2次元区分的一次分数写像の真軌道生成法の有効性を、Jacobi-Perron Algorithmに伴う写像などで確認した。

(3) 真軌道生成法のNIO現象への応用:

真軌道生成法をTWFS写像に用いることにより、誤差無し Noise-Induced Order 現象 (NIO 現象) のシミュレーションを行った。

(4) 真軌道生成法のHamilton系への応用:

標準写像の2次元区分的線形写像版を構成して、それに真軌道生成法を用いることにより、誤差無し Hamilton 系のシミュレーションを行った。

(5) 通常のカオスとは異なる特異性を示す力学系:

通常のカオスとは異なる特異性を示す力学系として、適応遅延フィードバック制御系を対象に研究を行った。

4. 研究成果

(1) 2次元区分的線形写像の真軌道生成:

2次元平面の点を整数係数の連立3次方程式の解で指定する場合には、グレブナー基底を用いる区間判定法が有効であることが明らかになった。この結果に基づいて、2次元区分的線形写像の真軌道生成法を構築した。実際に、確立した2次元区分的線形写像の真軌道生成法を、パイこね変換、アーノルドの猫写像、Double dragon 写像に適用し、その有効性を確認した (図1)。

また、連立3次方程式の整数係数以外の数表現を用いた場合にも、2次元区分的線形写像 (例えば、パイこね変換) の真軌道生成に成功した。

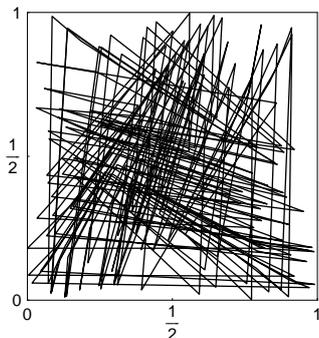


図1: アーノルドの猫写像の真軌道

(2) 2次元区分的一次分数写像の真軌道生成:

2次元区分的線形写像の真軌道生成法を拡張することにより、2次元区分的一次分数写像の真軌道生成法を構築した。実際に、構築した2次元区分的一次分数写像の真軌道生成法を、Jacobi-Perron Algorithm および Modified

Jacobi-Perron Algorithmに伴う写像に適用し、その有効性を確認した (図2)。

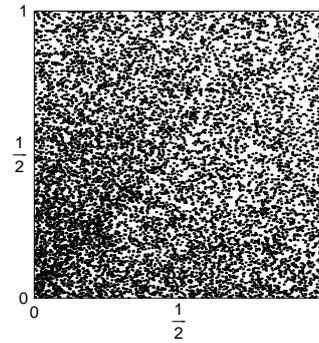


図2: Jacobi-Perron Algorithmに伴う写像の真軌道

(3) 真軌道生成法のNIO現象への応用:

真軌道生成法をTWFS写像に用いることにより、誤差無し Noise-Induced Order 現象 (NIO 現象) のシミュレーションが可能であることを確認した。また、従来では不可能だった極小スケールでの分岐図の描画が可能であることも確認した。さらに、Doiによって提唱された“アトラクタ平均化仮説”の検証も行った (図3)。特に、Doiの行ったシミュレーションにおいて数値誤差によるNIO現象が現れなかった理由を明らかにした。

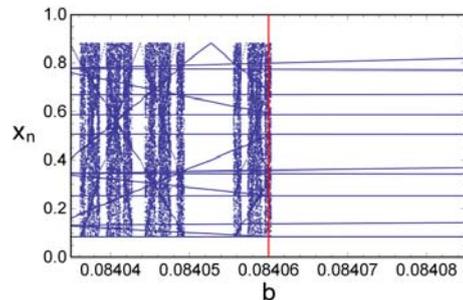


図3: NIO現象を説明するTWFS写像の分岐図

(4) 真軌道生成法のHamilton系への応用:

標準写像を近似するように2次元区分的線形写像を構成して、それに真軌道生

成法を適用することにより、誤差無し
のHamilton系のシミュレーションを行
った。
KAMトーラスの崩壊やカオス領域の拡大
などの標準写像でよく知られている結
果を、構成した写像で再現できること
が確認できた(図4)。

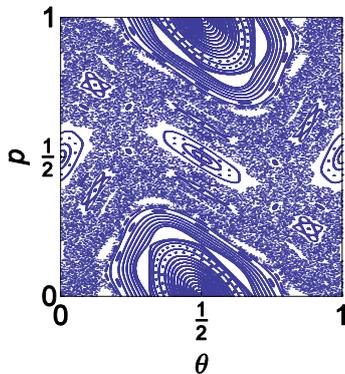


図4:最終 KAM トーラス崩壊後の相空間
の構造

- (5) 通常のカオスとは異なる特異性を示す力学系:
適応遅延フィードバック制御系の力学系の特異性を明らかにした(図5)。

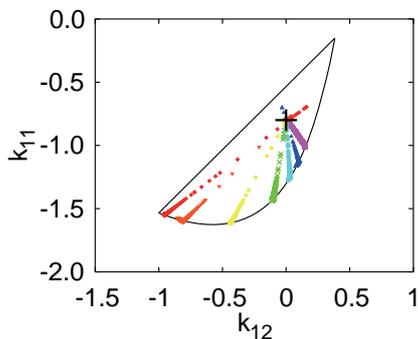


図5: 適応遅延フィードバック制御系
の力学系の特異性を示すパラメータ空
間上のダイナミクス

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者に
は下線)

[雑誌論文] (計1件)

- ① Asaki Saito, Keiji Konishi, Dynamical Singularities in Adaptive Delayed-Feedback Control, Physical Review E, 査読有, 掲載決定

[学会発表] (計9件)

- ① 斉藤朝輝、離散時間力学系の真軌道生成、CC-Seminar 2010、2011年3月4日、京都産業大学(京都府)
- ② 斉藤朝輝、真軌道生成法の Noise-Induced Order 現象への応用、Workshop「数論とエルゴード理論」、2011年2月19日、金沢大学(石川県)
- ③ Asaki Saito, Shunji Ito, True Orbit Computation Using Integer Arithmetic, International Conference “Far-From-Equilibrium Dynamics 2011”, 2011年1月6日、京都大学(京都府)
- ④ 斉藤朝輝、真軌道生成法の Noise-Induced Order 現象への応用、Kagoshima Workshop on Nonlinear & Nonequilibrium Dynamics、2010年10月17日、鹿児島大学(鹿児島県)
- ⑤ 斉藤朝輝、伊藤俊次、整数演算に基づくカオス写像の真軌道生成、日本物理学会2010年秋季大会、2010年9月24日、大阪府立大学(大阪府)
- ⑥ Asaki Saito, Shunji Ito, Realization of True Orbit Simulation Using Integer Arithmetic, International Workshop “Emerging Topics in Nonlinear Science”, 2010年9月14日、Schloss Goldrain, Italy
- ⑦ Asaki Saito, Experimental study on halting sets defined by a decision procedure, Workshop “Computability of discontinuous functions and related topics 09-2”, 2010年1月8日、京都産業大学(京都府)
- ⑧ Asaki Saito, Shunji Ito, Computation of true chaotic orbits using cubic surds, Workshop “Computability of discontinuous functions and related topics 09-1”, 2009年12月18日、京都産業大学(京都府)
- ⑨ 斉藤朝輝、伊藤俊次、3次無理数を用いたカオス真軌道の計算、日本物理学会2009年秋季大会、2009年9月26日、熊本大学(熊本県)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

斉藤朝輝 (SAITO ASAKI)

公立ほこだて未来大学・システム情報科学部・准教授

研究者番号: 60344040

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

なし