

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年5月15日現在

機関番号：82616

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2009～2011

課題番号：21700301

研究課題名（和文） ブロック・リサンプリング法に基づく2群の平均の有意差検定法の開発とその応用

研究課題名（英文） Research on construction and application of test of mean difference for two groups based on block resampling

研究代表者

櫻井 裕仁 (SAKURAI HIROHITO)

独立行政法人大学入試センター・研究開発部・准教授

研究者番号：00333625

研究成果の概要（和文）：本研究では、2群の母集団分布が未知で、各群においてはある種の相関構造が想定される場合に、そのような2群の平均に有意差があるか否かを判断する検定法を開発すること、および、開発した方法を現実のデータ解析に応用することを目的として研究を遂行した。本研究の成果として、各群のサンプルサイズが比較的小さい場合においても、従来の方法よりも検出力の高い検定法をいくつか構築することができた。

研究成果の概要（英文）：This research aims at construction of new testing methods for detecting the difference of two means when the populations of two group are unknown and each group has some correlation structure, and at application of the proposed methods to real data analysis. As important results of this research, we have developed some testing methods which are superior to traditional methods in power when sample sizes are relatively small.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2010年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2011年度	1,100,000	330,000	1,430,000
年度			
年度			
総計	3,200,000	960,000	4,160,000

研究分野：総合領域

科研費の分科・細目：情報学・統計科学

キーワード：計算機集約的統計，ブートストラップ法，circular block bootstrap 法，stationary bootstrap 法，2曲線の比較

## 1. 研究開始当初の背景

2群のデータが与えられる場合に、それらの母集団特性に関して何らかの知見を得ようとすることはよく行われる。例えば、ある観測値を計測するための新たな方法を開発した場合に、従来の方法と新しく開発した方法によって得た計測値が平均的に見て差があるか否かを知りたい、という場合である。

このような問題は、例えば、各群のデータ

（観測値）に対して、観測値は平均的な値と誤差に分解できるという回帰モデルを想定すれば、2群の平均の比較の問題として扱うことができよう。

しかし、回帰モデルの誤差項に対して正規性の仮定が置けない場合、さらには各群のデータが互いに独立に同一の分布に従う(i. i. d.)という仮定が成立しない場合、上記の検定を行うための検定統計量の帰無仮説

の下での分布（以下では帰無分布と呼ぶ）の導出は、一般には極めて難しく、本研究の開始当初には、このような研究はあまりなされていなかった。

## 2. 研究の目的

上記1の項で述べた問題を解決するために、本研究では、データが i. i. d. ではない場合について、特に縦断的データを検討の対象とし、2群の平均の有意差検定法を開発することを目的とする。また、現実のデータ解析に応用する場合には、できるだけ母集団やモデルに関する仮定や制約は少ないほうがよい。そこで本研究では、母集団分布に特定の分布形を仮定しない検定法を開発することも目的とする。

## 3. 研究の方法

### (1) 問題の定式化

観測する2群のデータの形式として、本研究では縦断的データを想定する。このとき、上記2の項で述べた目的を達成するために、まず、検討の対象とするデータを

- ① 2群に対応のない縦断的データ
- ② 2群に対応のある縦断的データ

の2つの場合に分ける。

次に、本研究では上記①と②の両方の場合に、上記1の項で述べたような回帰モデルを想定する。すなわち、各群のデータ（観測値）に対して、

$$\text{観測値} = \text{平均} + \text{誤差}$$

という回帰モデルを仮定する。このとき、上記1の項で述べたような問題を、2群の平均（回帰関数）の有意差検定の問題として扱う。すなわち、帰無仮説：2つの平均は等しい、対立仮説：2つの平均は異なる、という統計的仮説検定の問題として定式化し、以下で述べるような研究を行った。

### (2) 新たな検定法を構築するための方針

本研究では、2群の母集団分布として特定の分布形を仮定しないこと、各群において想定している隣り合うデータ間の相関構造をできるだけ崩さないこと、などを考慮し、ブロック・リサンプリング法のうち、circular block bootstrap法(Politis and Romano, 1992)とstationary bootstrap法(Politis and Romano, 1994)に着目して研究を進めた。ここでブートストラップ法は、1979年にエフロン(B. Efron)により提唱された代表的なリサンプリング法（標本からのサンプリングを行う方法）の一つであり、未知の母集団分布から標本を発生する機構を、上述したような

標本からサンプリングを行ってリサンプル（再標本）を得るという発生機構に置き換え、各種の推測を行う方法である。ブートストラップ法の特徴は、複雑な理論や数式に基づく解析を、コンピュータによる大量の反復計算（モンテカルロ近似）で置き換え、得られたリサンプルを活用して推定量の変動に関する情報を得ようとするところにある。しかし、エフロンが提唱したブートストラップ法を直接本研究の問題に適用することは難しい。それは、エフロンのブートストラップ法では観測したデータが i. i. d. の場合を想定しており、もしそれをそのまま適用した場合には、隣り合うデータ間の相関構造が崩れてしまうためである。そこで、隣り合うデータ間の相関構造を考慮した推測を行えるブロック・リサンプリング法（データをいくつかのブロックに分け、ブロック内での隣り合うデータの相関構造は保ったままブロックをリサンプリングする方法）に着目し、それらのうち、circular block bootstrap法とstationary bootstrap法を適用することとした。これらは、従来、推定問題において用いられることが多かったが、本研究ではこれらを上述した検定問題に適用し、その適用可能性を明らかにした。この結果については、後述する研究成果の項でまとめる。

circular block bootstrap法は、図1のように標本（データ）を円形に並べ、出発点を1つずつずらしたブロックを作成し、得られたブロックの集合からの無作為復元抽出によりリサンプルを構成する方法である。一方、stationary bootstrap法は、circular block bootstrap法と同様にしてブロックに分割するが、各ブロックの長さは幾何分布に従う確率変数と考える方法である。すなわち、前者ではすべてのブロックの長さは一定であるが、後者ではブロックごとにブロックの長さが異なる。

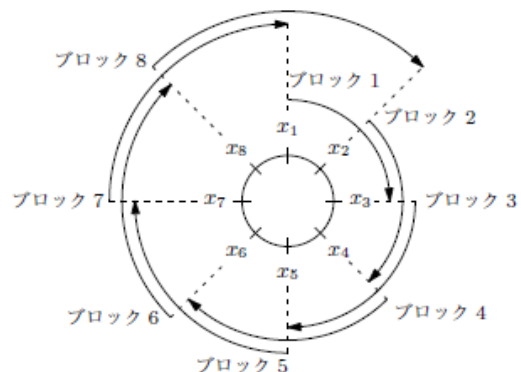


図1：標本のブロックへの分割例（ブロックの長さが3のcircular block bootstrap法の場合）

さらに、本研究を進める際には、次のような2つの問題点が考えられた。すなわち、上記(1)で述べたモデルに基づき、2群の平均を比較するための新たな検定法を開発する場合には、検定統計量の選定、および選定した検定統計量の帰無分布の近似法の研究が重要である。これらについては、次項(3)と(4)でまとめる。

### (3) 検定統計量の検討

本研究では、上記(1)で述べた①と②の場合の縦断的データに対して妥当と考えられる検定統計量の研究を行った。従来、時系列データに対する2つの回帰関数の有意差検定の問題では、2つの回帰関数の核型推定量の差の2乗和等が検定統計量として用いられている。

しかしここで、2つの回帰関数に挟まれる部分の面積に着目し、これを検定統計量と考えれば、上記(1)の項で述べた2群の平均の有意差検定の問題は、帰無仮説：2つの回帰関数に挟まれる部分の面積が0である、対立仮説：2つの回帰関数に挟まれる部分の面積は正の値を取る、という検定問題を考えることと同じである。そこで、このような性質に着目し、2つの回帰関数に挟まれる部分の面積を台形則により近似した推定量を検定統計量として用いる方法を考案した。この統計量に基づく検定法が従来の検定法と比較してどの程度よくなるかについては、後述する研究成果の項でまとめる。

### (4) 検定統計量の帰無分布の近似法の検討

ブートストラップ法に限らず、リサンプリング法に基づく検定法を開発する際に極めて大きな問題となるのは、我々が観測する標本(データ)は、帰無仮説で想定した母集団分布から得られるものではないことである。すなわち、本研究の問題の場合には、我々が観測できるデータは2群の母平均が等しいという帰無仮説のもとで得られるものではないことである。したがって、もし上記①と②のデータ構造の場合に妥当と考えられる検定統計量が得られたとしても、その帰無分布をいかに近似するかということは重要である。

そこで本研究では、妥当と考えられた検定統計量に対する帰無分布の近似法に関する研究も併せて行った。ここで、考察の対象とするデータが i. i. d. の場合、リサンプリング法に基づく2群の母平均の有意差検定における帰無分布の近似法として、2群のデータの標本平均が等しくなるようにデータを線形変換してから各群からリサンプリングする方法や、2つの標本を混合し、混合した標本から2群のデータに対応するリサンプルを発生させる方法等がある。本研究ではデータの

従属性を考慮し、このような考え方を、分割したブロックに対しては適用できることを確認した。具体的な方法は、後述する研究成果の項でまとめる。

### (5) 研究方法のまとめ

本研究では、以上の(1)~(4)を考慮し、以下の手順(a)~(d)により研究を遂行した。

- (a) データの構造に応じて、合理的と考えられる検定統計量とリサンプルの抽出法を選定する。
- (b) 上記(a)に基づく検定法を開発する。
- (c) 上記(b)で構成した各検定のサイズ、検出力を計算する。
- (d) 本研究で開発する手法間の比較、および従来の手法との比較・検討を行う。

### 4. 研究成果

本研究では、上記3の項で述べた方法に基づいて研究を進め、以下で述べるような成果が得られた。ここで、上記3の(1)では、データの構造を①と②の場合に分けて考えているので、以下でもそれぞれの場合についての成果をまとめる。

#### (1) 2群に対応のない縦断的データの場合

長さ  $n$  の系列が2群でそれぞれ  $q_1$  個と  $q_2$  個観測されているとする。この場合の検定のアルゴリズムとして、以下のものを考案した。

- (a) 各群の平均系列を計算する。
- (b) (a)から検定統計量の実現値を計算する。
- (c) 各群の平均系列をそれぞれの平均系列の平均で中心化する。
- (d) 手順(c)で得られた系列を circular block bootstrap 法と同様に、長さ  $l$  のブロックに分割し、各群で  $n$  個のブロックを得る。
- (e) 手順(d)で得られたブロックを合併し、 $2n$  個のブロックの集合を得る。
- (f) 手順(e)で得られたブロックの集合から、 $2n$  個のブロックを無作為復元抽出し、2群に対応するリサンプルを構成する。ここで、 $m = n/l$  ( $[n/l]$  が整数の場合)、 $m = [n/l] + 1$  ( $[n/l]$  が整数でない場合)であり、 $[n/l]$  は  $n/l$  の整数部分を表す。
- (g) 手順(f)で得られたリサンプルに基づき、検定統計量を計算する。
- (h) 手順(f)と(g)を適当な  $B$  回繰り返し、 $B$  個の検定統計量を計算する。
- (i) 手順(b)と(h)から、 $p$  値のモンテカルロ近似値を計算し、それが与えられた有意水準以下であれば、帰無仮説を棄却する。

以上の検定法によれば、上記3の(2)の項で述べた問題がある程度解決されることが分かった。すなわち、上記の(i)に基づいて計算される検定のサイズ、検出力に関するシミュレーションを行い、その数値的な挙動についての検討を行った結果、名目上のサイズを維持し、また多くの場合、従来の方法と比較して検出力の高い検定法を構成することができた。ここで、シミュレーション結果の一例を示す。図2の縦軸は検出力、横軸は後述する $c$ の値であり、このグラフに対応するシミュレーションは次のような設定で行われている。

- ・2群の平均：0と $c$ とする。ただし、 $c$ は  $0 \leq c \leq 1$  とする。
- ・2群の系列の長さ： $n = 10$
- ・2群の系列数： $(q_1, q_2) = (20, 20)$
- ・各群の誤差項：平均が0の1次の自己回帰モデルを与え、自己回帰係数は0.1、誤差項は平均0、分散3の正規分布に従うとする。
- ・検定のサイズ・検出力を計算するために、以上の設定をもとにして2群に対応する初期標本を独立に2000組与える。
- ・リサンプリング回数： $B = 2000$
- ・ブロックの長さ：名目上のサイズを維持するように取る。
- ・名目上の検定のサイズ：0.05
- ・検定統計量：上述した検定のアルゴリズムには、以下の検定統計量を用いた。  
 $T_{1n}$ ：各群の平均系列の差の絶対値の和  
 $T_{2n}$ ：各群の平均系列の差の2乗和  
 $T_{3n}$ ：各群の平均系列に挟まれる部分の面積に対する推定量  
 $S_n$ ：Hall and Hart (1990)による検定統計量
- ・既存の方法として、Bowman and Young (1996)による検定法（以下、BY法と略記する）を比較の対象とした。

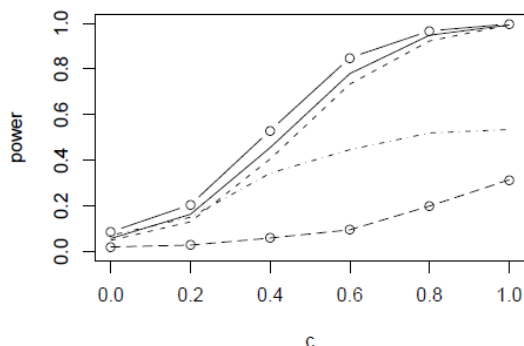


図2：検出力関数の比較（破線は $T_{1n}$ を、実線は $T_{2n}$ を、丸付きの実線は $T_{3n}$ を、1点破線は $S_n$ を、丸付きの破線はBYを、

それぞれ表す。）

シミュレーションを行った結果、以下の知見が得られた。

①検定のサイズについて

- (a) 提案した方法による検定のサイズは、名目上のサイズを維持する傾向にある。
- (b) BY法による検定のサイズは、名目上のサイズを過小評価する傾向がある。
- (c)  $S_n$ を用いた検定法では、ブロックの長さは2以下で十分な場合が多いが、 $T_{1n}$ 、 $T_{2n}$ 、 $T_{3n}$ の3つを用いた検定法では、ブロックの長さは3以上とする必要がある。
- (d) 自己回帰係数が0以下の自己回帰モデルを誤差項とした場合は、提案した検定のサイズと名目上のサイズとの差は小さいが、正の場合は、提案した検定のサイズと名目上のサイズとの差が大きくなる場合がある。

②検出力について

- (a) 提案した方法による検出力は、従来の方法（BY法）のそれよりも高い。特に、2群の母平均の差が大きくなるにつれて、その傾向は顕著である。
- (b) 提案した検定法に用いた4つの検定統計量について、検出力が最も高くなるのは $T_{3n}$ を用いた場合であり、以下、 $T_{2n}$ 、 $T_{1n}$ 、 $S_n$ の順に検出力が高くなる傾向がある。

(2) 2群に対応のある縦断的データの場合

次に、2群に対応のある縦断的データの成果をまとめる。この場合には、長さ $n$ の系列が2群でそれぞれ $q$ 個ずつ観測されているとする。この場合には、次のような検定のアルゴリズムを考案した。

- (a) 各群の平均系列から、平均系列の差を計算する。
- (b) (a)から検定統計量の実現値を計算する。
- (c) 平均系列の差を、平均系列の差の平均で中心化する。
- (d) 手順(c)で得られた長さ $n$ の系列を、stationary bootstrap法と同様にして、 $K$ 個のブロックに分割する。ここで、 $K$ は、幾何分布に従う確率変数の和が $n$ 以上となる時の、確率変数の個数の最小値である。
- (e) 手順(d)で得られたブロックの集合から $K$ 個のブロックを無作為復元抽出し、平均系列の差に対応する、大きさ $n$ のリサンプリングを構成する。
- (f) 手順(e)で得られたリサンプリングに基づ

- き、検定統計量を計算する。
- (g) 手順(d)から(f)を適当な  $B$  回繰り返し、 $B$  個の検定統計量を計算する。
- (h) 手順(b)と(g)から、 $p$  値のモンテカルロ近似値を計算し、それが与えられた有意水準以下であれば、帰無仮説を棄却する。

以上の検定法を適用した場合についても、2 群が対応のない縦断的データの場合と同様に、上記3の(2)の項で述べた問題がある程度解決されることが分かった。すなわち、上記(h)に基づいて計算される検定のサイズ、検出力に関するシミュレーションを行い、その数値的な挙動についての検討を行った結果、上記の検定法は、名目上の検定のサイズを維持する傾向があり、また多くの場合に従来の方法と比較して検出力が高くなることが示された。

図3には、2群に対応のある縦断的データの場合のシミュレーション結果の一例を示す。これは、図2と同様な検出力曲線を比較したグラフであり、また図2との比較を容易にするため、同様な設定によって得られた結果を示す。すなわち、2群の平均、2群の系列の長さ、2群の系列数(この場合は $q = 20$ )、各群の誤差項、検定のサイズ・検出力を計算するため初期標本数(2000組)、リサンプリング回数、ブロックの長さ、名目上の検定のサイズは、2群が対応のある場合と同じである。

また既存の方法として、BY法を比較の対象とする。ただし、2群が対応のない縦断的データの場合と同様に、名目上のサイズを維持できない場合が多く、かつ検出力も低いので、下図ではBY法の検出力曲線を省略する。

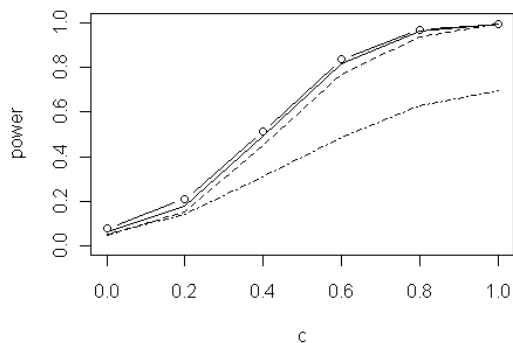


図3：検出力関数の比較（図2と同様に、破線は $T_{1n}$ を、実線は $T_{2n}$ を、丸付きの実線は $T_{3n}$ を、1点破線は $S_n$ を、それぞれ表す。）

シミュレーションを行った結果、次の知見が得られた。

#### ①検定のサイズについて

- (a) 提案した方法による検定のサイズは、名目上のサイズを維持する傾向にあるが、用いる検定統計量によりその挙動が若干異なる。
- (b) 自己回帰係数が0以下の自己回帰モデルを誤差項とした場合は、 $T_{1n}$ 、 $T_{2n}$ 、 $T_{3n}$ の3つを用いた検定法は名目上のサイズを維持し、 $S_n$ は名目上のサイズを維持または過小評価する傾向にある。
- (c) 自己回帰係数が正の自己回帰モデルを誤差項とした場合は、 $T_{1n}$ と $S_n$ が名目上のサイズを維持し、 $T_{2n}$ と $T_{3n}$ は過大評価する傾向にある。

#### ②検出力について

提案した検定法に用いた4つの検定統計量について、検出力が最も高くなるのは $T_{3n}$ を用いた場合であり、以下、 $T_{2n}$ 、 $T_{1n}$ 、 $S_n$ の順に検出力が高くなる傾向がある。

#### (3) まとめ

本研究課題では、2群の母集団分布に特定の分布形を仮定せず、また、各群のデータが縦断的データとして与えられている場合について、2群の母平均の有意差検定法を開発することができた。当初の研究目的を達成することができ、各群の系列の長さが短い場合にも、検出力の高い検定法を構成することができた。

本研究で開発した方法は、研究開始当初の背景の項で述べたようなデータ解析に適用することを想定している。しかし、データの形式および観測値に対して仮定されるモデルが研究の方法の(1)の項で述べたものと同様の場合には、本研究で得られた検定法を適用することが可能である。例えば、医学、薬学、生物学、経済学分野をはじめとして、工学、地球科学等の諸分野における現実の統計解析に資する点も多いと考えられる。

今後はさらに研究を進め、例えば、誤差項が本研究で扱ったものよりも複雑な場合の検定のサイズ・検出力の検討をはじめとして、より合理的と考えられる検定統計量の検討、最適なブロックの長さの選択法などを検討することも必要であろう。特に最後の点に関しては、現実のデータ解析を行う際に重要であると考えられる。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計2件)

- ① Sakurai, H. and Taguri, M. (2011).  
Test of mean difference for paired longitudinal data using stationary bootstrap, *Program Book of Joint Meeting of the 2011 Taipei International Statistical Symposium and 7th Conference of the Asian Regional Section of the IASC*, 184.  
(査読無)
- ② Sakurai, H. and Taguri, M. (2010).  
Test of mean difference for longitudinal data using circular block bootstrap, *COMPSTAT2010 Proceedings in Computational Statistics*, 1581-1588. (査読有)

[学会発表] (計2件)

- ① Sakurai, H.  
Test of mean difference for paired longitudinal data using stationary bootstrap,  
Joint Meeting of the 2011 Taipei International Statistical Symposium and 7th Conference of the Asian Regional Section of the IASC  
(at Academia Sinica, Taipei, Taiwan),  
2011年12月18日発表.
- ② Sakurai, H.  
Test of mean difference for longitudinal data using circular block bootstrap,  
COMPSTAT2010, 19th International Conference on Computational Statistics  
(at Conservatoire National des Arts et des Métiers (CNAM), Paris, France),  
2010年8月23日発表.

[図書] (計1件)

- ① 汪金芳, 桜井裕仁(2011).  
ブートストラップ入門, 共立出版,  
248 ページ.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

桜井 裕仁 (SAKURAI HIROHITO)  
独立行政法人大学入試センター  
・研究開発部・准教授

研究者番号 : 00333625

(2) 研究分担者

( )

研究者番号 :

(3) 連携研究者

( )

研究者番号 :