様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成２４年　４月１１日現在

機関番号：17701
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2009　～　2011
課題番号：21730686
研究課題名（和文）：探究的な算数・数学の授業における推測の段階に関する研究
研究課題名（英文）：A study on the phase of guess in inquiry-based lesson of mathematics
研究代表者
和田　信哉（WADA Shinya）
鹿児島大学・教育学部・准教授
研究者番号：60372471

研究成果の概要（和文）：推測の段階と正当化の段階から成る探究的な算数・数学の授業を考案する際には，推測の段階のデザインが重要になると考えられるので，それをアブダクションの観点から理論的・実践的に検討した。その結果，主として，①図式的推論と代数的推論の視座の重要性，②この二つを視座とした授業分析による推測の段階の様相の明確化とそれらの指導への示唆の導出，③図式的推論を視点とした授業の有効性，という成果を得ることができた。

研究成果の概要（英文）：We theoretically and practically examined the phase of guess that become important in constructing inquiry-based lesson of mathematics. The results were following. (1) The importance of diagrammatic reasoning and algebraic reasoning. (2) Clarification of the phase of guess and didactical implications. (3) The effectiveness of lesson from the viewpoint of diagrammatic reasoning.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2009 年度	500,000	150,000	650,000
2010 年度	500,000	150,000	650,000
2011 年度	600,000	180,000	780,000
年度			
総　計	1,600,000	480,000	2,080,000

研究分野：数学教育学
科研費の分科・細目：教育学・教科教育学
キーワード：探究的な授業，アブダクション，記号論，図式的推論，代数的推論

１．研究開始当初の背景

数学教育において人間形成を目指すならば，数量認識形成ということが重要になる。つまり，事象を数・量・形・関係に着目して認識する能力の育成である。このような能力の育成には，もちろん「知識・技能」が必要になる。しかしながら，その知識・技能が確かな「理解」に支えられていないと用いることはできず，またそれを理解していても活用方法（「数学的な考え方」）を知らなければ用いることはできない。

ところで，最近の算数・数学に関する調査結果や全国学力調査から，いわゆる「学力低下論争」で叫ばれてきた「知識・技能」より

も，「学ぶ意欲」や「活用する力」，「表現力」が低いことが指摘されている。数量認識形成という観点からは，このような現状は非常にバランスの悪い能力が形成されているといえるであろう。

子どもの学ぶ意欲が低いということは，換言すれば算数・数学が愉しい，面白い，もっと知りたい，と感じる「関心・意欲・態度」が低下していると考えられる。また，数学を活用する力が低いということは，知識・技能はそれほど低下していないので，それを活用する際に働く「数学的な考え方」が低下していると考えられる。これらの点を改善するためには，知的好奇心を刺激する，他教科や生活との関連を図るといったことが重要になる。もちろんそのベースには，確かな「理解」に支えられた「知識・技能」が重要である。

上記のような状況に鑑み，本研究の最終的な目的は，これらのバランスの取れた能力・態度の育成を念頭におき，「探究的な算数・数学の授業」を考案することにある。探究的な算数・数学の授業は，準経験主義的な科学哲学観に基づいて展開されることが望ましいであろう。つまり，「発見の文脈」（推測）と「正当化の文脈」（証明）のサイクルで説明される過程を探究的な授業の過程とみなすということである。

しかしながら，推測の段階は，まだ認知論的に明確にされているとは言い難い。その段階を推論という視点でみると帰納的推論と類比的推論が働くと考えられるけれども，それらだけではなく，パース（C. S. Peirce）が提起したアブダクション（abduction：発想的推論，仮説的推論）も働くと考えられる。アブダクションとは，驚くべき事実に直面したときに，それを説明することが可能である仮説を導き出す推論であり，単独で働く推論ではなく演繹的推論や帰納的推論とともに連鎖的に働くものである。ところが，この推論は数学教育では軽視されている。その要因としては，アブダクションの解釈が難解であることや数学教育におけるアブダクションの意義が明らかになっていないことなどが考えられる。しかしながら，上記のように演繹的推論や帰納的推論とともに連鎖的に働いているのであれば，アブダクションは数学教育においても重要な推論と考えられる。したがって，数学教育においてアブダクションの意義や機能を検討することは，探究的な授業の推測の段階を解明することに寄与するであろうと考えるに至った。

２．研究の目的

上記のような背景の下，これまでに基礎的研究として，記号論的観点から数学教育におけるアブダクションを考察し，異なる表現間を関連づける際にアブダクションが重要な役割を果たすことを明らかにしてきた。また，論理学的な形式の観点から数学教育におけるアブダクションを検討した結果，数学的な現象を含む命題を推測する推論であることを明らかにしてきた。

そこで本研究では，探究的な算数・数学の授業における推測の段階に焦点を当て，アブダクションを観点とした算数・数学の授業の分析を行うことで探究的な授業における推測の段階への示唆を得，それに基づいた授業の構成及び実践的検討を行うことを目的とする。

３．研究の方法

上記の目的を達成するために，次の三つの研究内容を設定した。

(1) 概念枠組みとなる記号論的視座の検討

本研究の概念枠組みとしてパースの記号論を使用することが適切であると考え，文献解釈的方法によって数学教育における記号論のとらえ方を検討する。

(2) 小学校及び中学校の授業分析を通したアブダクションの検討

上記の記号論的視座から，非参与観察によって小学校第 6 学年の分数の乗法・除法の授業，及び中学校第 3 学年の因数分解の授業を質的に分析し，実際の授業における子どもの記号のとらえ方についてアブダクションを中心にして検討する。

(3) 中学校の実験授業を通したアブダクションの検討

上記の授業分析の結果から，中学校第 2 学年の連立方程式の実験授業をデザインし，記号論的にその分析を質的に行う。

４．研究成果

上記の三つの研究内容に即して，研究成果について述べていく。

(1) 概念枠組みとなる記号論的視座の検討

パースの記号論を数学教育的に解釈し，さらにアブダクションをより明確にとらえるために，図式的推論と代数的推論の視座を明確にした。

図式的推論については，パースの提唱する推論である。まず，図式を，「記号における部分間の関係で，対象を指示するもの（対象の操作を含む)」としてとらえた。その上で，図式的推論を，「図式を用いて新しい性質などを見いだし，理解すること」ととらえ，図式の構成，図式の実験，実験結果の観察，の 3 段階からなるものとして定義した。つまり，図式的推論とは，課題やはじめの状況にある関係を明確にするために記号化し，そこから

子どもたちが内在している関係を読み取っていくことである。そして，実験結果の観察では「受け入れられない経験」が生じ，その際にアブダクションが働いて学習が進展する。したがって，図式的推論を視座として授業を分析すると，必然的にアブダクションを分析することになる。つまり，図式的推論の視座から，推測の段階への示唆を得ることだけでなく，推測の段階と正当化の段階の接続の課題にも接近できると考える。

また，推測の段階と正当化の段階の接続という課題は，小学校算数と中学校数学の接続という課題と密接に関連している。この課題の，特に代数的内容に関する接続について，代数的記号や内容を扱っていなくても代数的思考を働かせる場面は数多くあり，それを促進させることがそのような課題解決につながるという「初期の代数（Early Algebra）」という立場がある。この立場では，そのような思考を代数的推論という術語で特徴づけている。この代数的推論は，正当化の文脈にかかわるものであるが，見方を変えれば，代数的推論が働いた直前の場面，とりわけ図的表現を用いた代数的推論が働いた直前の場面でアブダクションが働いているといえるであろう。なぜなら，その直前の場面は推測の段階であり，前述の図式的推論の観点でこの一連の流れも説明がつくからである。

したがって，図式的推論と代数的推論という二つの視座は，数と計算あるいは数と式の領域を対象とするとき，アブダクションを中心とした推測の段階を検討する際に有益なものとなる。

(2) 小学校及び中学校の授業分析を通したアブダクションの検討

上記の二つの視座から，推測の段階への示唆を得るために，小学校第６学年の「分数の乗法・除法」，中学校第３学年の「因数分解」の授業をそれぞれ分析した。具体的には，両者とも非参与観察を行い，トランスクリプトを作成し，それに基づいて記号論を視座とした質的な分析を行って，推測の段階の様相をアブダクションを中心として明らかにし，指導への示唆を考察した。

小学校の授業においては，算数と数学の接続という課題も視野に入れ，代数的推論の観点で分析を行った。その結果，次のような結果を得ることができた。

第一に，とらえ方が不明確であった代数的推論を明確にしたことが挙げられる。授業の質的分析から，暫定的に，「数や演算の性質や関係などの関係性を見いだし，それを演繹的に説明して一般化すること」ととらえることができた。また，根拠に着目すると，具体に基づく代数的推論（図的表現や操作的表現を根拠とするもの）と抽象に基づく代数的推論（数や演算の性質を根拠とするもの）とに区別することができることも明らかにした。

第二に，代数的推論の機能を明らかにしたことが挙げられる。代数的推論は，「立式」，「計算方法の過程」，「計算方法の結果」，「演算の意味」，「演算の関係」という場面で機能することが明らかになった。特に，具体に基づく代数的推論については，その図的表現が手続き図から構造図へと変容することによって代数的推論として機能することを指摘した。

第三に，分数の乗法・除法の授業，さらには低・中学年の乗法・除法の授業への示唆を得ることができたことが挙げられる。数直線図における比例関係を認識するには，除法の導入のときからそれと関連づける必要があることや，乗法と除法が逆の関係にあることを，それらの導入の際に具体的操作と関連づけて理解させる必要があること，一つの代表的な特殊を例として，代数的推論を意図した授業を行う必要があることなどが明らかになった。

また，中学校の授業においては，文字式学習の困難という課題を視野に入れ，図的表現を活用した文字式学習を図式的推論の観点で分析した。その結果，次のような結果を得ることができた。

第一に，数学教育における図式的推論を構造化したことが挙げられる。図式的推論においては，解釈者が予期していなかった「受け入れられない経験」が重要な位置を占めている。授業分析から，それは，図式の実験の際に実験できないとき，実験結果の観察ができないとき，実験結果の観察はできるがその結果を受け入れられないとき，の三つの場面で生じることを指摘した。また，これをきっかけとして学習が進展し，その際にアブダクションが重要な位置を占めることも指摘した。つまり，図式そのものを見直そうとするときに働く翻訳としてのアブダクション，実験方法を見直そうとするときに働く変容としてのアブダクションである。

第二に，図式的推論の授業構成の原理として，次の五つを導出したことが挙げられる。

① 図式は，生徒によって自発的に構成されなければならない。
② 実験は，ルールと目的が明確でなくてはならない。
③ 観察は，前の表現の目的に照らした再解釈を行わなくてはならない。
④ 新しい性質などを見いだす際は，「受け入れられない経験」が生じなくてはならない。
⑤ 「受け入れられない経験」が生じた際は，図式または実験を修正しなくてはならない。

(3) 中学校の実験授業を通したアブダクションの検討

上記の授業分析を受け，特に中学校の結果から，第２学年の連立方程式に関する図式的推論を視点とする実験授業をデザインし，分析した。その結果，次のような結果を得ることができた。

第一に，前述の授業構成の原理が有効であることが実践的に検証されたことが挙げられる。

第二に，図式的推論を位置づけた学習過程により，「連立方程式の両辺をそれぞれひく」という抽象性の高い内容を主体的に見いだすことができたことが挙げられる。また，図式的推論によって目的意識が変化し，目的意識の変化によって図式的推論が進展するという相互作用がみられた。

第三に，図的図式で「消える」ことを実感し，記号的図式で「消す」ことを意識し，その後で形式的処理を学習することが主体的な学習につながったことを明らかにしたことが挙げられる。

第四に，図式的推論の授業構成の原理に関し，図式的推論では，実験ができない場合は翻訳に進み，観察ができない場合及び観察結果を受け入れられない場合は変容に進むことが明らかになったことが挙げられる。

(4)総括

以上の成果をまとめると，以下のようになる。

① パースの記号論に基づいた図式的推論と代数的推論の視座の検討
② 上記の二つを視座とした授業分析による推測の段階の様相の明確化とそれらの指導への示唆の導出
③ 図式的推論を視点とした授業の有効性

数学教育におけるアブダクションについて，図式的推論や代数的推論と関連づけてそれを明確化しようとしたところに，本研究の意義があろう。

ここで，今後の展望についても触れておきたい。本研究の視座とした図式的推論と代数的推論について，それぞれを明確にしたけれども，それらの関係については考察が不十分である。特に，具体に基づく代数的推論は，図式的推論ともみなすことができる。それゆえ，アブダクションによって代数的推論が促進されることや，図式的推論によって推測の段階と正当化の段階の接続が成功的に行われることなどが期待される。今後，このような観点で両者の関係を明らかにすることで，探究的な算数・数学の授業をデザインして検証していきたい。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計３件）

① 和田信哉，分数の乗法・除法に関する代数的推論の明確化―記号論的視座から―，全国数学教育学会誌　数学教育学研究，査読有，18(1)，2012，31-41
② 和田信哉，分数の乗法・除法に関する代数的思考の様相―代数的推論の観点から―，日本数学教育学会第 44 回数学教育論文発表会論文集，査読有，2011，441-446
③ 山本貴之，和田信哉，図式的推論を生かした数学の学習過程に関する研究―中学３年「因数分解」の授業分析を通して―，日本数学教育学会第 42 回数学教育論文発表会論文集，査読有，2009，787-792

〔学会発表〕（計３件）

① 和田信哉，分数の乗法・除法に関する代数的思考の様相―代数的推論の観点から―，日本数学教育学会，2011 年 11 月 13 日，上越教育大学
② 和田信哉，分数の乗法・除法における代数的推論に関する記号論的考察，全国数学教育学会，2011 年 6 月 26 日，広島大学
③ 山本貴之，和田信哉，図式的推論を生かした数学の学習過程に関する研究―中学３年「因数分解」の授業分析を通して―，日本数学教育学会，2009 年 11 月 7 日，静岡大学

〔図書〕（計１件）

① 古藤怜，池野正晴，和田信哉，他，東洋館出版社，豊かな発想をはぐくむ新しい算数学習―Do Math の指導―，2010，150

６．研究組織

(1)研究代表者

和田信哉（WADA Shinya）

鹿児島大学・教育学部・准教授

研究者番号：６０３７２４７１