

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 24年 5月 10日現在

機関番号：10101

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2009～2011

課題番号：21740001

研究課題名（和文） 混合モチーフ、代数K理論、レギュレーターの研究

研究課題名（英文） Mixed motives, algebraic K-theory and regulator

研究代表者

朝倉 政典 (ASAKURA MASANORI)

北海道大学・大学院理学研究院・准教授

研究者番号：60322286

研究成果の概要（和文）：

代数  $K$  理論とレギュレーターを主要なテーマとして研究した。とりわけ、楕円曲面の代数  $K$  群についてのサントミックレギュレーターを集中的に研究し、ブロック・加藤のセルマー群に新しい元を構成するなどのいくつかの著しい成果を挙げた。また、 $0$  サイクルのなすチャウ群のねじれ部分群についても研究を行い、成果を挙げた。

研究成果の概要（英文）：

I studied regulator which is a main topic in this research project. In particular, I had a stimulating research on syntomic regulator on  $K$ -groups of elliptic surfaces, and Got results, for example, construction of new elements in the Selmer group of Bloch-Kato. I also got a result on torsion subgroup of Chow group of  $0$ -cycles.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
平成21年度	900,000	270,000	1,170,000
平成22年度	900,000	270,000	1,170,000
平成23年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
年度			
総計	2,700,000	810,000	3,510,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：混合モチーフ、ホッジ理論、代数K理論、レギュレーター

## 1. 研究開始当初の背景

混合モチーフとは、グロタンディークによって考えだされ、その後、多くの一流数学者、ドリーニュやベイリンソンたちといった人々によって一般化および深化された理論である。それは、代数幾何学に現れるさまざまなコホモロジー理論を包括的に説明する理論である。これらがすべてが肯定的に完成されたあかつきには、具体的な問題への応用も可能になることが期待されており、極めて

実り多い理論であるといえる。

しかしながら、この分野の多くの数学者たちの努力にもかかわらず、多くの重要課題が未解決のままとなっている。近年、ヴォエヴォドスキによって、モチーフの導来圏に相当するものが得られ、著しい成果を挙げた。しかし、グロタンディークが目指そうとした理論の完成には、なお道半ばであると言わざるをえず、多くの課題が山積している状況である。本研究課題の主要なテーマであるレギュレ

ーターについても、ベイリンソン予想と呼ばれる極めて困難な未解決問題があり、この分野の多くの研究者たちの研究意欲を鼓舞し続けている。また、ホッジ予想およびテイト予想も積年の未解決問題となっており、今後も活発な研究が待たれる。これらの未解決問題は、単なる難問というだけではなく、グロタンディークのモチーフ理論の核心となるべき課題であり、研究する意義は非常に大きい。

## 2. 研究の目的

本研究課題においては、特に代数  $K$  理論における、 $p$  進レギュレーターとテイト予想の二つのテーマを軸にして研究をしている。具体的には、ベイリンソン予想、ブロック・加藤予想、 $K_2$  のテイト予想の解決を目指すのが目的である。さらに、それらの研究成果の上に立った上で、 $L$  関数および  $p$  進  $L$  関数の特殊値との関係を明らかにすることを目的とする。

本研究課題においては、いきなり一般的な解決を目指すのは得策ではないと考えており、具体的に地に足のついた計算結果を積み上げることを主要な目的としている。それらの計算結果は新しいというのみならず、その結果を受けて、興味深い新しい知見を得ることを目的としている。そして、そのような計算および知見によって、最終的には、上記の未解決問題への一般的な解決へのアプローチを示すことを目標としている。

## 3. 研究の方法

モチーフに関するさまざまな予想や未解決問題の一般的な解決は、まだ当分は無理だろうと考えている。本研究課題においては、 $p$  進レギュレーターとテイト予想の研究を主要なテーマとしているが、これらについても一般論を総括的に研究していくことは得策ではないだろうと考えている。

レギュレーターに関しては、いまだに十分な計算結果があるとはいえない。モジュラー曲線など、限られたケースでしか具体的な計算例がない状況である。そこで本研究課題では、モジュラーでない曲面なども含めて、具体的に地に足のついた計算結果を積み上げることを、主な研究方法としている。とりわけ、楕円曲面は本研究課題の代表者および共同研究者らによって、詳しく研究されてきたが、今後もこの方向性は継続し、より深い結果を得ることを期待している。そして、興味深い

計算結果や、それを受けてレギュレーターの新しい知見を得ることを目指している。

上記のように、レギュレーターの具体的な計算を行うことを主要な目的としているが、特殊な多様体を特殊な手法を用いて攻略するという方法はできるだけ避けたいと考えている。できるだけ広いクラスで適用できるような手法を目指して研究している。実際、より広いクラスで  $p$  進レギュレーターが計算できるようになれば、レギュレーターの研究に対して大きな貢献となることが期待できると考えている。

## 4. 研究成果

主要なテーマのひとつであるサントミックレギュレーターに関して研究をおこない、著しい研究成果をあげることができた。それにより2本の査読付き論文の出版、および海外を含む招待講演をいくつか果たした。

まず、佐藤周友氏(中央大学・教授)との共同研究について説明する。代数的サイクルに関するテイト予想は高次代数  $K$  理論に対しても自然な形で拡張され、それはベイリンソン・テイト予想とよばれている。私は佐藤氏と共同で、楕円曲面の場合に、この予想を研究した。主な道具として、サントミックコホモロジーを用いて攻略している。それによって、非自明な具体例の構成に成功し、また、ブロック・加藤のセルマー群に新しい元を構成するなどの成果を挙げた。この論文は、Journal of Algebraic Geometry に出版予定である。

チャウ群のねじれ部分群についても論文出版を行った。これについて説明する。これまで、 $p$  進体上定義された多様体の  $0$  サイクルのなすチャウ群のねじれ部分群は、一般には有限でないことが知られていたが、私はこの研究をさらに精密化させ、 $p$  べきねじれ部分群が無限群になる例を構成した。実際には、5次曲面でそのような例を構成した。これは自明な一般化ではない。以前に行った方法では、 $p$  と素なねじれ部分群が無限になることが分かっていただけであり、 $p$  べき部分群について攻略するには、新しいアイデアを必要とした。

以上の2件の研究成果は、 $p$  進レギュレーターないしサントミックレギュレーターと深くかかわっている問題であり、レギュレーターの詳しい研究に負うところが大きい。最近では、 $p$  進レギュレーターの研究をさらに深化させる研究を行った。すなわち楕円曲面の  $K_1$  群のサントミックレギュレーターの  $p$  進

展開を具体的に求めるという研究を行った。この研究は東北大学において成果発表した。さらに深化させるために、現在も研究を継続中である。これは今後も発展が期待でき、意義が大きいと思われる。

このように、サントミックレギュレーターを中心にいくつかの著しい成果をあげることができたが、しかし、一方で、それをL関数をはじめとする特殊関数の特殊値と結びつけるという問題に至っては、いまだ成果不十分であるといわざるを得ない状況である。これについては、現在も研究を継続中であり、今後の進展が期待される。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計4件)

以下はすべて査読付き論文

##### ①朝倉政典

Quintic surface over p-adic local fields with infinite p-primary torsion in the Chow group of 0-cycles.

Contemporary Mathematics (出版予定、印刷中)

##### ②朝倉政典, 佐藤周友

Syntomic cohomology and Beilinson's Tate conjecture for  $K_2$ .

Journal of Algebraic Geometry (出版予定、印刷中)

##### ③朝倉政典, 佐藤周友

Beilinson's Tate conjecture for  $K_2$  of elliptic surface: survey and examples.

In Cycles, Motives and Shimura Varieties (Ed. V. Srinivas),  
Tata Institute of Fundamental Research, (2010), 35--58.

##### ④朝倉政典

Local units are generated by certain cyclotomic units.}

京都大学数理解析研究所講究録別 B12 (2009), 183--191.

[学会発表] (計5件)

以下はすべて招待講演。

##### ①講演者: 朝倉政典

講演題目: Explicit computation of syntomic regulator on  $K_1$  of elliptic surface over a p-adic field.

研究集会名: Workshop on p-adic arithmetic geometry and motives

開催場所: 東北大学

開催年月: 2012年1月

##### ②講演者: 朝倉政典

講演題目: Note on syntomic regulator and slope.

研究集会名: Algebraic K-theory and Its Applications

開催場所: 南京大学、中国

開催年月: 2011年3月

##### ③講演者: 朝倉政典

講演題目: Note on syntomic regulator and slope.

研究集会名: Arithmetic and Algebraic geometry

開催場所: 東京大学

開催年月: 2011年1月

##### ④講演者: 朝倉政典

講演題目: Quintic surface over p-adic local fields with infinite p-primary torsion in the Chow group of 0-cycles.

研究集会名:

Regulator III (organizers, Lewis, Raskind, de Jeu, Xarles, Gil)

開催場所: バルセロナ大学、スペイン

開催年月: 2010年7月

##### ⑤講演者: 朝倉政典

講演題目:  $K_2$  の Tate 予想と p 進レギュレーター

研究集会名: 日本数学会 秋季総合会

開催場所: 大阪大学

開催年月: 2009年9月

〔図書〕（計 0 件）

〔産業財産権〕

○出願状況（計 0 件）

○取得状況（計 0 件）

〔その他〕

ホームページ等

なし

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

朝倉 政典 (ASAKURA MASANORI)

北海道大学・大学院理学研究院・准教授

研究者番号：60322286

### (2) 研究分担者

なし

### (3) 連携研究者

なし