

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 5 月 15 日現在

機関番号：12501
 研究種目：若手研究(B)
 研究期間：2009～2012
 課題番号：21740002
 研究課題名（和文） モチーフの L 関数と一般超幾何関数および一般多重対数関数の研究

研究課題名（英文） Motivic L-functions, generalized hypergeometric functions and generalized polylogarithms

研究代表者 大坪 紀之 (Noriyuki Otsubo)
 千葉大学・大学院理学研究科・准教授
 研究者番号：60332566

研究成果の概要（和文）：フェルマー・モチーフのレギュレーターを一般超幾何関数の特殊値で表し、ベイリンソン予想に関して肯定的な結果を得た。また、フェルマー曲線に付随するチェレーザ・サイクルのアーベル・ヤコビ写像による像を一般超幾何関数の特殊値で表し、ヤコビ多様体のグリフィス群の非自明な元を得た。

研究成果の概要（英文）：We expressed the regulators of Fermat motives in terms of special values of generalized hypergeometric functions and obtained positive results on the Beilinson conjecture. We also expressed the images of the Ceresa cycles associated with Fermat curves under the Abel-Jacobi maps in terms of special values of generalized hypergeometric functions and obtained non-trivial elements of the Griffiths groups of the Jacobian varieties.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2009 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2010 年度	900,000	270,000	1,170,000
2011 年度	700,000	210,000	910,000
2012 年度	700,000	210,000	910,000
年度			
総計	3,300,000	990,000	4,290,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：数論幾何学, モチーフ, L 関数, 超幾何関数, 代数的サイクル

1. 研究開始当初の背景

モチーフの L 関数は数論の中心的な対象であり、特に、その特殊値がレギュレーターという不変量で表されるというベイリンソン・ブロック・加藤予想は最も重要な問題の一つである。

しかし、知られている例は限られており、そのほとんどが階数 1 の場合である。したがって、新たな例、とくに階数が高いものを得

ることは重要である。いずれの場合も、代数的、解析的、幾何的な対象の間の関係を示すことが本質であり、深い数論的な結果が必要である。

円分体や楕円曲線の場合には、多重対数関数とその一般化が L 関数の特殊値を記述すること、対応するモチーフ的コホモロジーの元が存在することなどが知られており、上の問題への応用があった。したがって、一般のモチーフ上への多重対数関数の一般化が期

待されていた。

一方、フェルマー曲線のレギュレーターが一般超幾何関数の特殊値で書けるという事実が、研究代表者により分かってきており、その一般化やベイリンソン・ブロック・加藤予想への応用が期待されていた。

代数的サイクルはモチーフ的コホモロジーの一種だが、余次元が高い場合その構造は難しい。代数体上では、その構造とL関数の間の深い関係が予想されている(BSD予想, テイト予想など)。

2. 研究の目的

この研究の目的は、ベイリンソン・ブロック・加藤予想といったモチーフのL関数とモチーフ的コホモロジーの関係について、数論的に重要な具体的な場合に新しい結果を得ること、そして一般の場合の考察を深めることである。またそのために、一般超幾何関数や一般多重対数関数が果たす役割を広げることである。

より具体的には、次がこの研究の主な目的である：

- (1) フェルマー・モチーフ (フェルマー多様体に付随するモチーフ) のベイリンソン・ブロック・加藤予想やその p 進的な類似を証明すること。
- (2) 一般の多様体上の混合モチーフの三角圏にモチーフ的な多重対数層を構成し、そのホッジ実現とL関数との関係を調べること。
- (3) フェルマー曲線のチェレーザ・サイクルのアーベル・ヤコビ写像による像を計算し、代数的サイクルに関する新たな結果を得ること。

3. 研究の方法

(1) フェルマー多様体を分解して得られるモチーフのモチーフ的コホモロジーに円単数と類似した元を構成し、そのレギュレーターを計算する。レギュレーターの積分表示を用いて、一般超幾何関数の特殊値と結びつける。そして、一般超幾何関数の特殊値の性質を用いて、上記の元のレギュレーター像が消えないこと、そしてレギュレーターの全射性を証明する。

(2) 多重対数関数を一般の多様体で考察するために、ヴォエヴォドスキーによって構成された混合モチーフの三角圏を用いる。多様体に付随する一般アルバネーゼ多様体が表現する層は上の三角圏における拡大を定める。これを用いて一般の多様体上のモチーフ的な多重対数層の構成、そのホッジ実現の計算などを研究する。

(3) 曲線はそのヤコビ多様体上の次元が1の代数的サイクルを定める。その k 回対称積がチェレーザ・サイクルを定める。チェレーザ・サイクルのアーベル・ヤコビ写像による像は混合ホッジ構造の拡大を定め、それは反復積分によって記述される。フェルマー曲線の場合に、それを一般超幾何関数を用いて記述する。その値は計算機を使って具体的に計算する。

4. 研究成果

(1) フェルマー・モチーフのモチーフ的コホモロジー群に含まれる円単数と類似した元のレギュレーターを、一般超幾何関数の特殊値で完全に記述した。また、その値が消えないことを一般超幾何関数の性質から導いた。それを用いて、レギュレーターの局所的な全射性を示した。さらに、次数が低い場合には大域的な全射性 (ベイリンソン予想の一部) も示した。

(2) 次数の低い場合にはフェルマー・モチーフは虚数乗法をもつ楕円曲線に付随するモチーフと同形になる。具体的な幾何的構成により、フェルマー曲線に対する上記の元と楕円曲線に対するブロックの元とを比較し、一般超幾何関数の特殊値とこのモチーフのL関数 (=ヤコビ和のヘッケL関数) の特殊値との間の明示的な関係を示した。

(3) 一般の種数 g のフェルマー曲線の対称積から定まる $k=1, \dots, g-2$ 次元のチェレーザ・サイクルのアーベル・ヤコビ写像による像を一般超幾何関数を用いて記述し、計算機を用いて多くの場合に計算した。この主の結果は $g=3, k=1$ のときにのみ知られていたが、それをすべての g と k に一般化し、計算可能な記述を与えた。そして、その非自明性により、グリフィス群の非自明な例を多く得た。

(4) 一般の多様体に関して、その一般アルバネーゼ多様体が表現するニスネヴィッチ層がヴォエヴォドスキーの三角圏の元を定める。この対称積の系が対数層の一般化を定義し、よい性質を持つということが分かった。

(5) しかし、多重対数層の存在に関しては、否定的な結果を得た。一般種数の曲線の場合に対数層の拡大群を (ホッジ実現において) 計算し、留数のみで特徴付けできるような標準的な拡大 (多重対数層と期待するもの) が存在しないことが分かった。

(6) 本来の計画にはなかったものだが、上記の研究から派生して（フェルマー・モチーフのL関数はヤコビ和のヘッケL関数である）、代数的整数論に関する次の結果を得た。

岩澤の仕事により、ヤコビ和の局所単数としての性質が円分体のイデアル類群の構造と深い関係にあることが知られていた。そこで、ヤコビ和の局所単数としての微分を計算し、それをある種のベルヌイ数の類似を用いて表した。また、これらの数の中のモチーフ的な関係式を得た。

5. 主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 3 件）

① Noriyuki Otsubo, On the Abel-Jacobi maps of Fermat Jacobians, *Math. Z.* 270 (2012), 423-444. (査読あり)

② Noriyuki Otsubo, Certain values of Hecke L-functions and generalized hypergeometric functions, *J. Number Theory* 131 (2011), 648-660. (査読あり)

③ Noriyuki Otsubo, On the regulator of Fermat motives and generalized hypergeometric functions, *J. reine angew. Math.* 660 (2011), 27-82. (査読あり)

〔学会発表〕（計 12 件）

① 大坪紀之, ヤコビ和の微分とベルヌイ数の類似について, 東北大学, 代数セミナー, 2012.12.20.

② Noriyuki Otsubo, Mixed Hodge structures arising from Fermat curves and generalized hypergeometric functions, ホッジ理論と代数幾何学, 東京電機大学, 2012.8.1.

③ 大坪紀之, ヤコビ和の微分と円分体のイデアル類群について, 香川セミナー, 香川大学, 2011.5.21.

④ 大坪紀之, フェルマー曲線のチェレーザ・サイクルと一般超幾何関数. 特殊多様体

研究集会, 東京大学玉原国際セミナーハウス, 2010.9.7.

⑤ Noriyuki Otsubo, Harmonic volumes of Fermat curves and generalized hypergeometric functions. リーマン面に関連する位相幾何学, 東京大学, 2010.9.5.

⑥ 大坪紀之, フェルマー曲線と一般超幾何関数. 代数学シンポジウム, 北海道大学, 2010.8.11.

⑦ Noriyuki Otsubo, Regulator of Fermat motives. Regulators III, Institut de Matemàtica de la Universitat de Barcelona (スペイン), 2010.7.22.

⑧ Noriyuki Otsubo, Ceresa cycles of Fermat curves. Arithmetic Geometry and p-adic differential equations, 東北大学, 2010.7.2.

⑨ Noriyuki Otsubo, Certain values of Hecke L-functions and generalized hypergeometric functions. 2010 Korea-Japan number theory, Seoul National University (韓国), 2010.1.20.

⑩ 大坪紀之, フェルマー曲線と一般超幾何関数, I, II, III. ワークショップ「p 進特殊関数と数論幾何」, 蔵王, 2009.10.28, 29, 30.

⑪ Noriyuki Otsubo, On the Abel-Jacobi maps of Fermat Jacobians. International workshop on motives in Tokyo, part 5, 東京大学, 2009.12.15.

⑫ Noriyuki Otsubo, Certain values of Hecke L-functions and generalized hypergeometric

functions. 特殊多様体研究集会, 東京大学玉
原国際セミナーハウス, 2009.7.22.

[その他]

ホームページ

<http://www.math.s.chiba-u.ac.jp/~otsubo>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

大坪 紀之 (Noriyuki Otsubo)

千葉大学・大学院理学研究科・准教授

研究者番号 : 60332566

(2) 研究分担者

()

研究者番号 :

(3) 連携研究者

()

研究者番号 :