

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成25年6月6日現在

機関番号：12601

研究種目：若手研究（B）

研究期間：2009年度～2012年度

課題番号：21740003

研究課題名（和文）

相対的  $p$  進コホモロジー，ホモトピー及び過収束アイソクリスタルの研究

研究課題名（英文）

Study on  $p$ -adic cohomology, homotopy and overconvergent isocrystals

研究代表者

志甫 淳 (SHIHO ATSUSHI)

東京大学・大学院数理科学研究科・准教授

研究者番号：30292204

研究成果の概要（和文）：過収束アイソクリスタルというある種の  $p$  進微分方程式に対する以下の結果を証明した。まず過収束アイソクリスタルの対数的延長定理を証明した。次に過収束アイソクリスタルの対数的延長可能性，可積分接続付加群の過収束性についての曲線切断による判定条件を証明した。更に過収束  $F$  アイソクリスタルについてのある種の純性定理を証明した。そしてある種の放物的単根対数的収束  $F$  アイソクリスタルの圏を定義し，それが基本群の馴分岐  $p$  進表現の圏と同値であることを示した。また，可積分接続付加群の圏とヒッグス加群の圏についての Ogus-Vologodsky の結果のある種の一般化を証明した。

研究成果の概要（英文）：I proved the following results on overconvergent isocrystal, which is a certain  $p$ -adic differential equation. First, I proved the theorem of logarithmic extension for overconvergent isocrystals. Next I proved the theorem of cut-by-curves criterion for the log extendability of overconvergent isocrystals and the overconvergence of modules with integrable connections. Moreover, I proved a kind of purity theorem for overconvergent  $F$ -isocrystals. I defined the category of certain parabolic unit-root log convergent  $F$ -isocrystals and proved that it is equivalent to the category of tamely ramified  $p$ -adic representations of fundamental groups. Also, I proved a certain generalization of a result of Ogus-Vologodsky on the category of modules with integrable connection and the category of Higgs modules.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	800,000	240,000	1,040,000
2010年度	700,000	210,000	910,000
2011年度	800,000	240,000	1,040,000
2012年度	700,000	210,000	910,000
年度			
総計	3,000,000	900,000	3,900,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：過収束アイソクリスタル，対数的収束アイソクリスタル，対数的構造， $p$  進微分方程式， $p$  進表現，可積分接続， $p$  進非リュービル数

## 1. 研究開始当初の背景

標数  $p > 0$  の代数多様体上の良い性質を持つ  $p$  進コホモロジー理論として，Berthelot

によりリジッドコホモロジーの概念が定義された。そしてリジッドコホモロジーの係数として過収束アイソクリスタルと呼ばれる

ある種の収束性を持つ  $p$  進微分加群が定義された。この過収束アイソクリスタルは複素多様体上の局所系、代数多様体上の平滑  $1$  進層 ( $1$  は多様体の標数と異なる素数)、標数  $0$  の代数多様体上の可積分接続付加群の概念の  $p$  進的な類似物であり、従ってこれらの理論と同等の豊かな理論が広がっていると推測される。

Andre, Christol, Crew, Dwork, Katz, Kedlaya, Mebkhout, Robba, 都築, 松田らによる  $p$  進微分加群の局所的な研究を通じて、 $1$  次元代数多様体上の過収束アイソクリスタルの基本的性質についてはわかってきた。高次元の代数多様体上の場合、フロベニウス構造付きの過収束アイソクリスタル (これを過収束  $F$  アイソクリスタルと呼ぶ) については、更にフロベニウス構造が単根という性質を満たす場合には、Crew, Katz, 都築の研究により、代数多様体の基本群の  $p$  進表現と対応することが知られていた。フロベニウス構造が単根とは限らない場合には「係数付の特異点解消」に当たる「半安定還元予想」(志甫予想) が本研究により提示され、本研究期間開始時点では Kedlaya によりその証明がアナウンスされている所であった (現在では証明が出版されている)。その証明の過程で、モノドロミーが冪単な時の高次元代数多様体上の過収束アイソクリスタルの対数的延長の研究が行われており、本研究によりその一般化が行われている所であった。

## 2. 研究の目的

標数  $p > 0$  の代数多様体上、特に高次元代数多様体上の過収束アイソクリスタルの性質を、特に過収束アイソクリスタルの対数的延長可能性を中心課題として解明することを研究の目的とした。過収束アイソクリスタルは標数  $0$  の代数多様体上の可積分接続付加群の概念の  $p$  進類似なので、可積分接続付加群に対して成り立つ性質の  $p$  進類似の証明を目標とした。

また、過収束単根  $F$  アイソクリスタルの対数的延長可能性は、対応する基本群の  $p$  進表現の馴分岐性と対応すると考えられるので、この対応の正確な定式化、証明を目標とした。

また、これらの研究の、過収束アイソクリスタルを係数とする相対的リジッドコホモロジーやホモトピーへの理論への応用を考察することも研究目的とした。

## 3. 研究の方法

まず、標数  $p > 0$  の代数多様体上の過収束アイソクリスタルの対数的延長可能性の研究については、モノドロミーが冪単なときの Kedlaya による先行研究を適宜修正し、より複雑な  $p$  進級数の計算をすることにより一般化が可能であるという結果が出ていたの

で、それを論文の形にまとめ、適宜修正した上でそれを投稿した。

次に、標数  $0$  の代数多様体上の可積分接続付加群の理論との類似を通じて、標数  $p > 0$  の代数多様体上の過収束アイソクリスタルに対しても対数的延長可能性が曲線切断により判定可能なのではないかとということに思い至り、その研究を始めた。可積分接続付加群の場合の Deligne, Andre, Baldassarri の研究を参考にし、また  $1$  次元  $p$  進穴あき円板上の  $p$  進微分方程式論における Christol, Mebkhout, Kedlaya の手法を学び詳細に検討した結果、その証明に辿り着いた。また結果を論文にまとめ、それを投稿した。

更に、この結果の証明手法を詳細に検討した結果、同様の手法を違った状況に適用することにより、可積分接続付加群の過収束性に対しても曲線切断による判定が出来るのではないかと思われたので、その証明にとりくんだ。ここでは Kedlaya による正標数の平滑な代数多様体の構造に関する結果や Kedlaya, Xiao による高次元  $p$  進穴あき円板上の  $p$  進微分方程式論が必要であったが、それをうまく用いることにより証明ができた。これも論文にまとめて投稿した。

また、平滑な代数多様体上の平滑  $1$  進層や可積分接続付加群においては純性定理 (大雑把に言えば余次元  $2$  の部分を無視してよいという定理) が知られている。過収束アイソクリスタルに対してはこの定理は Kedlaya により知られていたが、その部分的な改良に取り組んだ。証明の為に Kedlaya や Etesse による過収束アイソクリスタルの貼り合わせに関する結果を学び、これをうまく用いることで証明ができた。これも論文にまとめて投稿した。

更に、過収束単根  $F$  アイソクリスタルの対数的延長可能性と基本群の  $p$  進表現の馴分岐性との対応について、この対応の正確な定式化を目指した。この研究のもととなるのは Mehta-Seshadri による開リーマン面の基本群の既約ユニタリ表現の圏とコンパクト化したリーマン面上の放物的安定ベクトル束の圏との圏同値である。この同値の  $p$  進版が存在すべきであるということが翁により指摘されていることを知ったことが研究の動機となった。翁氏との研究連絡や、Mehta, Seshadri, 翁らの論文の詳細な検討により、放物的単根対数的収束  $F$  アイソクリスタルの圏の定義に到達した。また、この圏の中で半単純調整済という条件を満たすものの圏と、基本群の馴分岐  $p$  進表現の圏が同値であることを証明した。証明には、放物的ベクトル束の圏と根スタック上のベクトル束の圏の同値を示した Borne の論文を検討し適切な  $p$  進化を考えることが重要であり、また、本研究による過収束アイソクリスタルの対

数延長の理論が重要な役割を果たす。この研究についての論文の原稿を書いたが、良く整理されているとは言えないので改稿準備中である。

また Mehta-Seshadri の上述の結果は非アーベルホッジ理論として Simpson, 望月により大幅に一般化されている。本研究者の上記の研究の文脈でこれがどのように  $p$  進化されるかは明らかではないが、標数  $p > 0$  の代数多様体上の  $p$  を法とする係数の世界では Ogus-Vologodsky により準冪単な可積分接続付加群の圏と準冪単な Higgs 加群の圏との圏同値が知られていた。そこで、この圏同値を  $Z/p^nZ$  上のスキーム上の圏同値へと一般化することを試みて研究を始めた。その結果、 $Z/p^nZ$  上のスキームに対しては準冪単な可積分接続付加群の圏と準冪単な Higgs 加群の圏との圏同値は成り立たないことがわかった。しかしながら、その途中の段階とも言える準冪単な可積分接続付加群の圏と準冪単な可積分  $p$  接続付加群の圏との圏同値を証明することができた。証明のため Berthelot によるフロベニウス降下の理論を学び、それをうまく適用させた。この結果についても論文の原稿にまとめたが、これについてもまだ改稿準備中である。

以上に挙げた成果について、国内外の多くの研究集会で研究発表を行い、研究成果の発信に努めた。特に、本研究期間中に日本数学会賞春季賞を受賞することとなったので、日本数学会において総合講演を行った。また、日本数学会が出版する雑誌「数学」への論説執筆の依頼を受け、 $p$  進微分方程式と過収束アイソクリスタルについての論説を執筆した。

研究全体としては、図書の購入およびインターネットの活用による資料の入手、そしてその内容の詳細な検討が研究の基本である。また、国内外の研究集会への参加や国内外の研究者との研究討論が研究の進展に大きく寄与した。

#### 4. 研究成果

(1) 標数  $p > 0$  の体  $k$  上の代数多様体  $X$  が良いコンパクト化を持つとし、また  $\Sigma$  を  $p$  進整数環の部分集合で、その任意の異なる 2 元の差が整数や  $p$  進リュウビル数にならないようなものであるとする。このとき、 $X$  上の過収束アイソクリスタル  $E$  に対して  $\Sigma$  冪単モノドロミーを持つという概念を定義し、それが満たされる時には  $E$  が  $X$  上のコンパクト化上の対数的収束アイソクリスタルに延長できることを示した。この結果の本質的部分は本研究期間前年度の研究でわかっていたが、本研究期間中に論文を完成させ、出版にこぎつけた。この結果は可積分接続付加群の対数的延長に関する Deligne の結果の自

然な  $p$  進版であり、また Kedlaya の結果を冪単モノドロミーとは限らない場合に一般化したものである。

(2)  $k, X, \Sigma$  を (1) の通りとし、また  $k$  は非可算であるとする。このとき、 $X$  上の過収束アイソクリスタル  $E$  が  $\Sigma$  冪単モノドロミーを持つことは、任意の曲線  $C$  から  $X$  へのコンパクト化の縁と横断的に交わる局所閉埋入による  $E$  の引き戻しが  $\Sigma$  冪単モノドロミーを持つことと同値であるという定理を証明した。可積分接続付加群に対してはこの結果はよく知られており、その  $p$  進版であるが、証明はより複雑となる。可積分接続付加群に対してはより強い結果が知られている ( $C$  が  $X$  のコンパクト化の縁と横断的に交わるという条件は不要である) ので、 $p$  進版で対応するより強い結果を出すことが今後の課題の一つである。この結果についても論文にまとめて投稿し、出版に至った。

(3)  $k$  を (2) の通りとし、 $V$  を  $k$  を剰余体とする混標数完備離散付値環、 $K$  をその分数体とする。 $X$  を  $V$  上の代数多様体で射影的な良いコンパクト化を持つものとし、また  $E$  を  $X$  の生成ファイバー上の可積分接続付加群とする。このとき  $E$  が ( $p$  進的な意味で) 過収束性を持つことは、任意の  $V$  上の曲線  $C$  から  $X$  へのコンパクト化の縁と横断的に交わる局所閉埋入による  $E$  の引き戻しが過収束性を持つことと同値であることを示した。この結果についても論文にまとめて投稿し、出版に至った。(2), (3) については  $k$  の非可算性という条件を外したときにどうなるかを考えることは今後の課題である。また (1), (2), (3) の結果を過収束アイソクリスタルを係数とする相対的リジッドコホモロジーの理論やリジッドホモトピーの理論へ応用することも今後の課題である。

(4)  $k, X$  を (1) の通りとする。このとき  $X$  上の過収束  $F$  アイソクリスタルの圏が  $X$  及び過収束域を余次元 2 以上の閉部分多様体を取り去ることにより縮めて考えても圏が不変であること (純性定理) を示した。過収束域を縮めないときはこの結果は Kedlaya によるが、その部分的な一般化である。この結果についても論文にまとめて投稿し、出版へと至った。

(5)  $k, X$  を (1) の通りとし、また  $Y$  を  $X$  の良いコンパクト化とする。このとき、 $Y$  上の半単純調整放物的単根対数的収束  $F$  アイソクリスタルの圏を定義し、それが  $X$  の代数的基本群の馴分岐  $p$  進表現の圏と圏同値であることを示した。これは Mehta-Seshadri による開リーマン面の基本群の既約ユニタリ表現の圏とコンパクト化したリーマン面上の放物的安定ベクトル束の圏との圏同値の  $p$  進版の一つの形である。また、Katz, Crew による単根収束  $F$  アイソクリスタルの圏と

代数的基本群の  $p$  進表現の圏との圏同値の対数版である。この結果については一旦論文原稿にまとめたが、よく整理されているとは言えないので改稿が今後の課題である。

以上 (1) ~ (5) の結果は高次元代数多様体上の過収束アイソクリスタルに関連する重要な結果であると考えられる。可積分接続付加群の場合や平滑 1 進層の場合との比較を通じて、更なる進展が期待される。

(6)  $Z/p^nZ$  上のスキームの平滑な射  $X \rightarrow S$  で、この射、そのフロベニウス引き戻しおよび相対フロベニウス射が適当な持ち上げを持つ場合に、 $X/S$  上の準冪単な可積分接続付加群の圏と  $X/S$  上の準冪単な可積分  $p$  接続付加群の圏が圏同値であることを示した。これは標数  $p > 0$  のスキームの平滑な射に対する Ogus-Vologodsky のある結果の一般化である。この結果についても一旦論文原稿にまとめたが、改稿が今後の課題であると考えている。

(7) 以上の結果を含む業績により日本数学会春季賞を受賞した。また日本数学会が出版する雑誌「数学」への論説執筆の依頼を受け、1 次元  $p$  進穴あき円板上の  $p$  進微分方程式と標数  $p > 0$  の代数多様体上の過収束アイソクリスタルについて、対数的延長理論および半安定還元定理の観点から解説した論説を執筆し、それが出版された。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 5 件)

1. 志甫淳,  $p$  進微分方程式と過収束アイソクリスタル, 数学, 第 63 巻第 4 号(2011), 369-395, 査読有.

2. A. Shiho, Purity for overconvergence, Selecta Math. 17(2011), 833-854. 査読有.

3. A. Shiho, Cut-by-curves criterion for the log extendability of overconvergent isocrystals, Math. Z. 269(2011), 59-82. 査読有.

4. A. Shiho, Cut-by-curves criterion for the overconvergence of  $p$ -adic differential equations, manuscripta math. 132(2010), 517-537, 査読有.

5. A. Shiho, On logarithmic extension of overconvergent isocrystals, Math. Ann. 348(2010), 467-512, 査読有.

[学会発表] (計 22 件)

1. A. Shiho, On  $p$ -adic differential equations, Mathematics colloquium, Yonsei University (韓国), 2013 年 3 月 28 日.

2. A. Shiho, On restriction of overconvergent isocrystals, Number theory

seminar, Korea Institute for Advanced Study (KIAS) (韓国), 2013 年 3 月 27 日.

3. A. Shiho, On restriction of overconvergent isocrystals,  $p$ -adic cohomology and its application to arithmetic geometry, 東北大学, 2012 年 11 月 2 日.

4. A. Shiho, On a generalization of local Ogus-Vologodsky correspondence, Symposium on arithmetic geometry, 九州大学, 2012 年 10 月 20 日.

5. A. Shiho, Parabolic log convergent isocrystals, Symposium on arithmetic geometry, 九州大学, 2012 年 10 月 19 日.

6. A. Shiho, On restriction of overconvergent isocrystals, Pan Asian number theory conference, Indian Institute of Scientific Education and Research (IISER) Pune (インド), 2012 年 7 月 24 日.

7. A. Shiho, On restriction of overconvergent isocrystals, Arithmetic geometry week in Tokyo, 東京大学, 2012 年 6 月 6 日.

8. A. Shiho, On extension and restriction of overconvergent isocrystals, 2011 Japan-Taiwan workshop on arithmetic geometry and related topics, Academia Sinica (台湾), 2011 年 11 月 19 日.

9. A. Shiho, On extension and restriction of overconvergent isocrystals, 東京パリ数論幾何セミナー, 東京大学, 2011 年 11 月 9 日.

10. 志甫淳, 局所 Ogus-Vologodsky 対応の一般化について, 談話会, 東北大学, 2011 年 10 月 17 日.

11. 志甫淳, 過収束アイソクリスタル, 日本数学会総合講演, 信州大学, 2011 年 9 月 29 日.

12. 志甫淳,  $p$  進表現と  $p$  進微分方程式: 正標数の代数多様体の場合, 仙台シンポジウム, 東北大学, 2011 年 8 月 10 日.

13. 志甫淳,  $p$  進表現と  $p$  進微分方程式: 正標数の局所体の場合, 仙台シンポジウム, 東北大学, 2011 年 8 月 10 日.

14. 志甫淳,  $p$  進微分方程式の対数的延長について, 談話会, 東京大学, 2011 年 6 月 24 日.

15. 志甫淳, Purity for overconvergence, 整数論セミナー, 大阪大学, 2010 年 10 月 1 日.

16. A. Shiho, Purity for overconvergence, Arithmetic geometry and  $p$ -adic differential equations, 東北大学, 2010 年 7 月 3 日.

17. A. Shiho, Logarithmic extension of overconvergent isocrystals and an

application, Current trends in logarithmic geometry, Universite de Bordeaux 1 (フランス), 2010年6月22日.

18. 志甫淳,  $p$ 進微分方程式の対数的延長について, 談話会, 千葉大学, 2010年5月21日.

19. A. Shiho, On logarithmic extension of overconvergent isocrystals, Industrious number theory, 九州大学, 2009年12月4日.

20. 志甫淳, Cut-by-curves criteria for certain properties of  $p$ -adic differential equations, セミナー, 九州大学, 2009年12月2日.

21. 志甫淳, Parabolic log convergent isocrystals, セミナー, 九州大学, 2009年12月2日.

22. A. Shiho, Cut-by-curves criteria for certain properties of  $p$ -adic differential equations, Mini-workshop on isocrystals, 東北大学, 2009年10月16日.

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

志甫 淳 (SHIHO ATSUSHI)

東京大学・大学院数理科学研究科・准教授

研究者番号: 30292204

### (2) 研究分担者

なし.

### (3) 連携研究者

なし.