様式Ｃ－１９

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成２５年　５月３１日現在

機関番号：１２６０８
研究種目：若手研究（Ｂ）
研究期間：2009～2012
課題番号：21740004
研究課題名（和文）数論的ゼータ関数の解析的性質と幾何学的対称性
研究課題名（英文）Analytic properties of arithmetic zeta functions and geometric symmetry
研究代表者
鈴木　正俊（SUZUKI　MASATOSHI）
東京工業大学・大学院理工学研究科・准教授
研究者番号：30534052

研究成果の概要（和文）：
ゼータ関数とは，リーマンゼータ関数を原型とするある特殊関数の一群を指し，数学の諸分野で重要な役割を果たす．本課題では， 数論に関係するゼータ関数について，その解析接続，零点・極の分布に関する研究を行った．その成果として，数論的ゼータ関数の解析的性質と現代的な調和解析の新しい結びつきが得られたほか，リーマンゼータ関数の直接的一般化である高階ゼータ関数の零点分布に対して新しい結果が得られた．

研究成果の概要（英文）：
Zeta functions are a group of certain special functions having its origin in the Riemann zeta function. They play important roles in various fields of mathematics. In this research project, we studied about important analytic properties of arithmetic zeta functions like analytic continuations and distributions of thier poles and zeros. As the results, we established a new bridge between analytic properties of zeta functions in number theory and modern harmonic analysis, and obtained new results on the distribution of zeros of so-called high-rank zeta functions which are direct generalizations of the Riemann zeta function.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2009 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2010 年度	800,000	240,000	1,040,000
2011 年度	800,000	240,000	1,040,000
2012 年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			0
総　計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・代数学
キーワード：数論、ゼータ関数、解析接続、関数等式、零点分布

１．研究開始当初の背景

数論的ゼータ・L 関数とは，数論に由来する特定のデータを用いて定義され，かつ，幾つかの標準的な性質を満たす（或いは満たすと予想される）特殊関数の通称である．代表的な例として，保型 L 関数（保型表現の L 関数），Artin L 関数（Galois 表現の L 関数），数論的スキームのゼータ関数等が挙げられ

る．古典的なRiemann ゼータ関数，Dirichlet L 関数，Dedekind ゼータ関数等がこれらの原型となっている．多くの場合，ゼータ関数・L 関数はその定義に用いられたデータに関する様々な深い性質を，自身の解析的性質として表現する．したがって，ゼータ関数の解析的性質を探ることは重要かつ興味ある問題であり，その為これまで多くの研究がなされてきた．数論的ゼータ関数の解析的性質についてまず問題となるのは，それの

（１）（有理型）解析接続と関数等式

である．通常，数論的ゼータ関数は，アプリオリにはある右半平面上でしか定義されないからである．つぎに問題となるのが，解析接続された数論的ゼータ関数の極の分布と

（２）零点の分布

である．特に零点の分布は最も重要な数論的性質と密接に関係しており，その深い数論的性質を反映して特別な分布を取ると予想されている．これにはRiemann 予想と呼ばれる零点の実部に関するものと，Montgomery・Odlyzko の相関予想を始めとする零点の虚部に関するものが挙げられる．

２．研究の目的

前項のような背景に対し，本研究課題では幾何学的な観点から新たな対象を考察する事，および新たな手法の導入を試みることにより（１）解析接続と関数等式，（２）零点の分布，という２つのテーマに対して，その構造や成り立ちの新側面を捉える事を目的として開始された．

（１）について，近年最も盛んに研究され，かつ成功を収めている方針は，研究対象とするゼータ関数・L 関数を保型L 関数の理論に結びつける事である．この方針は強力な指導原理の一つではあるが，この方針に従う限り，解析接続と関数等式の証明に多くの課題が残されているケースも少なくない．これに対し本研究課題では，これとは全く異なる方針を幾何学的な視点から新たに提示することを目的の一つとしていた．

一方、先に述べたように，（２）はゼータ関数に関する最も深い性質と考えられており，これまで数多くの研究が成されてきた．それにもかかわらず，これについては未だに謎に満ちた部分が多く，Riemann 予想のような有名な予想であっても，それを裏付ける理論，もしくは哲学は少なかった．これはある意味で，今までの理論や手法には限界がある事を示しており，新たな試みの必要性を示唆していた．特に，零点分布に関して幾何学的な視点から試みられた研究・手法は多くなかった．これらを踏まえて，本研究課題では，ゼータ関数の零点分布に幾何学的対称性がどのように関係しているのかを探る事も目的の一つとしていた．

３．研究の方法

（１）について研究を進めるにあたり，本研究課題では，I. Fesenko によって近年提示された「数論的スキームのゼータ関数の研究に高次元アデール上の調和解析を用いる」という手法に着目した．これは岩澤・Tate による古典的手法の一般化となっているが，高次元アデール上の積分論が従来は整備されていなかったため，Fesenko 以前には行われていなかった方針である．彼の理論を用いると，数論的スキームのゼータ関数はゼータ積分と呼ばれるある高次元アデール空間上のフーリエ積分として捉えられ，解析接続や関数等式の問題が，その積分の境界項と呼ばれる部分の性質に還元される．本研究課題ではこの境界項の性質を調べる事を通して，より一般のゼータ関数の解析接続や関数等式について考察することを行った．

（２）について研究を進めるにあたり，本研究課題では，近年L. Weng により導入された高階ゼータ関数と，簡約代数群G の各極大放物部分群P に対して定義されるゼータ関数に着目した（これを以下では(G,P)のゼータ関数と呼ぶ）．高階ゼータ関数は，代数体に対して定義される 古典的なDedekind ゼータ関数が，幾何学的視点からはArakelov 直線束のモジュライ空間を用いて記述されることを背景に，それを高階数のArakelov ベクトル束のモジュライ空間に対して自然に一般化することにより定義される．(この一般化の際にはベクトル束の安定性の概念が重要である.）この由来により，高階ゼータ関数はDedekind ゼータ関数を階数１ の場合として含む．(G,P)のゼータ関数はこの高階ゼータ関数の研究から自然に派生した対象であり，G を特殊線型群 SL(n) としP をG のある極大放物部分群とした場合は，高階ゼータ関数に一致する．(G,P)のゼータ関数については，

・いくつかの特別な場合ではRiemann 予想が証明されている．
・簡約代数群に由来する抱負な対称性（Weyl 群による対称性）を持っている．

という著しい特徴がある．本研究課題ではこれらの性質を手がかりに，一般の (G,P) のゼータ関数の零点に対する研究を行った．

４．研究成果

(1)に関する成果として，まず雑誌論文③が挙げられる．これは高次元アデール上の調和解析の創始者である I. Fesenko と，解析的整数論の専門家である G. Ricotta との共同研究で，数論的スキームのゼータ関数とは限らないより一般のゼータ関数に対して，その解析接続と関数等式に関する問題を，関数解析における平均周期性の概念と結びつけた

ものである．平均周期性と似た概念として概周期性というものがあるが，概周期性と異なり，平均周期性が数論またはゼータ関数の理論と関連付けられて論じられたことはこれまで殆ど例がなく，これは全く新しい方向性を提示する画期的な成果であった．実際，講演や論文での発表後には幾人かの著名な数論研究者から問い合わせがあり，今後の展望に関して重要な示唆が幾つも得られた．特に数論の大家の１人であるP. Sarnakから示唆された斜交形式との関連は，解析接続と関数等式の問題を超えて，（２）の零点分布とも関連しており非常に興味深く，今後の課題の一つである．

少し話を戻すと，雑誌論文③の結果は当初，数論的スキームのゼータ関数のゼータ積分表示における境界項の被積分関数が平均周期性を持つ事が，数論的スキームのゼータ関数が解析接続と関数等式を持つ事とほぼ同値であるという結果として得られた．しかし研究を進めるに連れ，それはより一般のゼータ関数に対して拡張可能である事が判明し，最終的に雑誌論文③で発表したような成果となった．この結果は数論的ゼータ関数の理論と平均周期性の概念を結びつけた事が主眼の一つだったが，より専門的には，数論的ゼータ関数と関連すべき平均周期性の条件を詳細に論じた箇所が重要である．

一般に平均周期性の概念は，それに関連した関数空間（とその位相）をどの様に設定するかに強く依存している．これに対して，雑誌論文③では数論的ゼータ関数と関連すべき関数空間がどのようなものであるべきかも論じており，これにより数論的ゼータ関数と平均周期性の概念の関連性がより明確な形で提示されたと言える．

一方，雑誌論文③では，数論的ゼータ関数と平均周期性の概念を結びつける補助関数が，数論的ゼータ関数の極や零点の分布といかに結びつくか，という点についても扱った．これは（２）と関連する．これについて，特に楕円曲線のＬ関数についてより詳しく論じたのが雑誌論文⑥の成果である．ここでは先に述べた補助関数の高階導関数がある種の正値性を持つ事が，楕円曲線の L 関数のRieamann 予想の``十分条件”となっている事を述べている．この結果をFesenkoの既知の結果と合わせると，上記の補助関数の高階導関数の正値性と，楕円曲線の L 関数のRiemann 予想がほぼ同値であるという結果が得られる．これに関する更なる考察が以下の（３）の成果へと繋がってゆく．

(2)に関する成果は学会発表⑤，⑧，⑪～⑬を通じて論文にまとめられ現在海外専門誌投稿中であるが，研究代表者のホームページでも以下の通り公開されている：
http://www.math.titech.ac.jp/~msuzuki/wrh_gp.pdf
この成果は関数論・ゼータ関数論の専門家であるH. Ki，およびLie環・数理物理などの専門家である小森靖との共同研究であり,有理数体上定義された半単純代数群Ｇとその極大放物部分群 P について，(G,P)のゼータ関数が弱いRiemann予想を満たす事を述べたものである．弱いRiemann予想とは，当該のゼータ関数の零点が，有限個の例外を除いて関数等式の中心線上にある事を指す．この結果はＧが特殊線形群の場合，極大放物部分群Ｐを適切に選べば，(G,P)のゼータ関数が高階ゼータ関数（ゼータ関数の原型であるRiemann ゼータ関数の自然な一般化）となっていることを想起すれば非常に興味深い．実際，(G,P)のゼータ関数の視点からは，ゼータ関数の原型である Riemann ゼータ関数は``SL(1)のゼータ関数”と見なせる．

この結果を導くに際しては，(G,P)のゼータ関数の関数等式と，代数群Ｇに付随するルート系および Weyl 群に深い関係があることを見抜いた小森靖の成果(Amer. J. Math. に掲載予定)と，N.G. de Bruijn のフーリエ積分の零点に関する結果（1950）をある特別な（G,P）のゼータ関数の零点分布の研究に応用した H. Ki の手法(IMRN, 2010)を著しく発展させた形で用いる事により成された．実際，上記の URL にある論文の結果を導くために，我々はＧに付随するルート系の構造に関する新しい結果を導くことを必要とした．このルート系の構造に関する成果は，本研究課題の研究代表者と小森靖が得た成果である．

更に，この（G,P）のゼータ関数の零点分布に関する研究を通じて，簡約代数群の放物部分群の構造が零点分布と密接に関連している事が明らかになり，これは代数群の構造に関する新しい研究を触発した（例えば L. Weng, General Uniformity of Zeta Functions, http://arxiv.org/abs/1209.4515など)．

(3) 本研究課題における(1)と(2)に関する研究を通じて，これらを研究するためには，ある種のモデル空間の理論を利用するのが有効であることが判明した．モデル空間とは,ある半群の作用で不変な関数空間の一種であり，特に再生核ヒルベルト空間であるという著しい性質をもつ．上記を踏まえて，本研究課題では，完備化されたゼータ関数の微小変形（平行移動）を用いて生成される，ある種のモデル空間の族を扱うことをも行った．これらのモデル空間たちは，その要素たちが全て複素平面上で有理型であるという更に良い性質を持っている．

最初の成果として，上で述べたようなモデル空間を研究するに際しては，ゼータ関数のある微小変形の比を用いて定義される，

ある重み付き級数(の族)を積分核とするハンケル型の積分変換(の族)を用いるのが有効である事を明らかにした．これを応用して，我々はゼータ関数の一般Riemann予想と，上で述べた（積分変換の核として扱われる）重み付き級数の平均的な漸近挙動がある種の単調性を持つ事が同値であるという結果を得た（雑誌論文⑤）．

この最初の成果を受けて，本研究課題ではモデル空間に対する研究を更に推進した．一般に，モデル空間には正準系と呼ばれる線形常微分方程式の族が対応し，モデル空間の性質は正準系のハミルトニアンと呼ばれる量の性質に反映される．雑誌論文⑤などでは，ゼータ函数のある微小変形の比にあるモデル空間を対応させ，そのハミルトニアンを詳しく研究したのだが，厳密な成果を得るには微小変形のパラメータの大きさに制限を付ける必要があった．この問題点を解消するために，ゼータ函数のある積分表示を利用することを行った．より具体的には,ゼータ関数のある積分表示を有限リーマン和で近似し，その有限リーマン和の変数変換から得られる多項式に対して，適当なモデル空間と，それに付随する正準系のハミルトニアンを考察することにより，もとのゼータ函数のハミルトニアンを計算することを試みた．当初はこれをゼータ函数の微小変形に対して行っていたが，間もなくこの手法は微小変形を施す前の元のゼータ函数に対して直接行う方がシンプルで無駄がないことが判明した．

ここまでの(3)に関する成果のまとめとして，学会発表③などを行った．これについては学会参加者から会期中，もしくは会期後に様々なコメントが寄せられ，今後の研究に対する示唆がいくつも得られた．

この発表の前後，同様の手法によって，自己相反多項式と呼ばれる実係数多項式一般に対して，ハミルトニアンを具体的に書き下せるような正準系を対応させられることが判明し，自己相反多項式の根の分布と正準系のハミルトニアンを対応させるという新しい知見を得ることができた（学会発表①，③，④）．この成果は，有限体上定義された代数曲線のゼータ関数がある種の自己相反多項式とみなせることから，それらの研究についても応用があることが期待される．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計８件）

① M. Suzuki, A family of deformations of the Riemann xi-function, Acta Arithmetica **157** (2013), no. 3, 201－230, 査読有, doi:10.4064/aa157-3-1

② M. Suzuki, A canonical system of differential equations arising from the Riemann zeta-function, Functions in Number Theory and Their Probabilistic Aspects (eds K. Matsumoto, S. Akiyama, K. Fukuyama, H. Nakada, H. Sugita, A. Tamagawa), 397 － 436, RIMS Kôkyûroku Bessatsu **B34**, RIMS, Kyoto, 2012, 査読有, http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kenkyubu/bessatsu.html

③ I. Fesenko, G. Ricotta, M. Suzuki, Mean-periodicity and zeta functions, Annales de l'institut Fourier **62** (2012), no. 5, 1819－1887, 査読有, doi: 10.5802/aif.2737

④ 鈴木正俊, 自己相反多項式と微分方程式の標準系, 数理研講究録「解析数論-数論的関数の多重性に関連して」, No.1806 (2012), 176－185, 査読無, http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/1806-18.pdf

⑤ M. Suzuki, On monotonicity of certain weighted summatory functions associated with L-functions, Commentarii Mathematici Universitatis Sancti Pauli **60** (2011), no. 1-2, 211－226, 査読有, http://www.rkmath.rikkyo.ac.jp/commentari/commentari.html

⑥ M. Suzuki, Positivity of certain functions associated with analysis on elliptic surfaces, Journal of Number Theory 131 (2011), no. **10**, 1770－1796, 査読有, doi: 10.1016/j.jnt.2011.03.007

⑦ 鈴木正俊, (G, P) に付随するWeng ゼータ関数の零点について, 数理研講究録「保型形式・保型表現およびそれに伴うL 函数と周期の研究」, No.1715 (2010), 159－168, 査読無, http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/1715-17.pdf

⑧ 鈴木正俊, Eisenstein series and zeros of zeta functions, 数理研講究録「解析数論およびその周辺の諸問題」, No.1710 (2010), 60－70, 査読無, http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/1710-08.pdf

〔学会発表〕（計１３件）

① 鈴木正俊,単位円周上に根を持つ自己相反多項式について, 日本数学会 2013 年度年会, 2013 年 3 月 23 日, 京都大学

② 鈴木正俊, 自己相反多項式の零点と微分方程式, 数理研研究集会「解析的整数論とその周辺-近似と漸近的手法を通して見た数論」, 2012 年 10 月 30 日, 京都大学数理解析研究所

③ M. Suzuki, Zeta functions as a variant of the cosine function; Zeta functions and canonical systems of linear differential equations (2 講演), Zeta Function 2012, 2012 年 9 月 28 日, 東京工業大学
④ M. Suzuki, Zeros of self-reciprocal polynomials and canonical systems of differential equations, 2012 Conference on L-functions, 2012 年 8 月 24 日, Shineville Resort Jeju, South Korea.
⑤ 鈴木正俊, On the zeros of Weng zeta functions for Chevalley groups, 数理研研究集会「代数的整数論とその周辺」, 2011 年 12 月 2 日, 京都大学数理解析研究所
⑥ 鈴木正俊, On a sequence of Hilbert spaces of entire functions arising from the Riemann zetafunction, 数理研研究集会「解析的整数論-数論的関数の多重性に関連して」, 2011 年 11 月 2 日, 京都大学数理解析研究所
⑦ M. Suzuki, Certain second order differential equation arising from the Riemann-zeta function,
The Fifth International Conference in Honour of J. Kubilius: Analytic and Probabilistic Methods in Number Theory, 2011 年 9 月 9 日, Conference Center of Vilnius University in Palanga, Lithuania
⑧ M. Suzuki, Zeros of Weng's zeta functions for Chevalley groups, RIMS Project Research: Workshop on Various Zeta Functions and Related Topics, 2010 年 12 月 21 日, 東京大学
⑨ M. Suzuki, An equivalence condition for the Riemann hypothesis (Poster session), RIMS Project Research: Functions in Number Theory and Their Probabilistic Aspects, 2010 年 12 月 13-17 日, 京都大学数理解析研究所
⑩ 鈴木正俊, On subspaces of the Hardy space related to zeros of zeta functions, 数理研研究集会「解析数論-複素関数の値の分布と性質を通して」, 2010 年 10 月 5 日, 京都大学数理解析研究所
⑪ 鈴木正俊, (G, P) に付随するWeng ゼータ関数の零点について, 数理研研究集会「保型形式・保型表現およびそれに伴うL 函数と周期の研究」, 2010 年 1 月 21 日, 東京大学数理科学研究科
⑫ 鈴木正俊, Eisenstein series and zeros of zeta functions, 数理研研究集会「解析数論およびその周辺の諸問題」, 2009 年 10 月 14 日, 京都大学数理解析研究所
⑬ M. Suzuki, On the zeros of zeta functions for (G,P)/**Q**, Zeta Function Days in Seoul, 2009 年 9 月 3 日,
Yonsei University, South Korea.

〔その他〕
ホームページ等
http://www.math.titech.ac.jp/~msuzuki/index.html

６．研究組織
(1)研究代表者
鈴木　正俊（SUZUKI　MASATOSHI）
東京工業大学・大学院理工学研究科・准教授
研究者番号：30534052
(2)研究分担者
なし
(3)連携研究者
なし