

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 24 年 6 月 4 日現在

機関番号：13401

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2009～2011

課題番号：21740007

研究課題名（和文）数理論理学への応用を目指したコンフォーマル超代数の表現論の研究

研究課題名（英文）Study on representations of conformal superalgebras and applications to mathematical physics

研究代表者

古閑 義之 (KOGA YOSHIYUKI)

福井大学・大学院工学研究科・准教授

研究者番号：20338429

研究成果の概要（和文）：本研究では、コンフォーマル超代数の表現とその応用に関する研究を行い、以下の成果を得た。

1. コンフォーマル超代数に部分代数として含まれるヴィラソロ代数の表現論は、コンフォーマル超代数の表現を研究する上でも重要である。本研究では、リヨン大学の庵原氏との共同研究として、ヴィラソロ代数の表現論の基礎事項をまとめた専門図書を発表した。
2. コンフォーマル超代数と密接な関わりを持つカツ・ムーディー超代数について、特異ベクトル公式に関する研究を行った。

研究成果の概要（英文）：In this research, we obtained the following results concerning conformal superalgebras:

1. The Virasoro algebra is contained in conformal superalgebras as a subalgebra, and it plays important roles in the representation theory of conformal superalgebras. We publish a book correcting basic results in the representation theory of the Virasoro algebra in collaboration with K. Iohara (Lyon Univ.).
2. A close relation between a conformal and a Kac-Moody superalgebras is known. We study the singular vector formula for some Kac-Moody superalgebras.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	700,000	210,000	910,000
2010年度	900,000	270,000	1,170,000
2011年度	600,000	180,000	780,000
年度			
年度			
総計	2,200,000	660,000	2,860,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：環論（含むリー環）

1. 研究開始当初の背景

コンフォーマル超代数とは、ヴィラソロ代数の超リー代数への拡大として得られる無限

次元超リー代数であり、その表現論は共形場理論等の数理物理学で重要な役割を果たす。

コンフォーマル超代数の重要な特徴の一つとして、ヌブ・シュワルツセクターやラモンドセクター等のセクターの存在がある。例えばコンフォーマル超代数を対称性を持つ共形場の理論では、いくつかのセクターがまとまって理論全体が構成される。そのため数理物理学への応用を考慮すると、セクターを限定する事なく、コンフォーマル超代数の表現論を調べる事は重要である。

コンフォーマル超代数の表現論は、頂点作用素超代数の理論を用いて取り扱いが可能である。但し正確には、頂点作用素超代数として取り扱いが可能であるのはヌブ・シュワルツセクターの表現のみであり、他のセクターの表現はヌブ・シュワルツセクターの「ツイストされた加群」(ツイストセクター)として理解される。しかしながらヌブ・シュワルツセクター以外のセクターの表現論に関しては、ほとんど研究が行われていないこともあり、ツイストセクターも含めて研究された頂点作用素超代数の例はほとんど知られていなかった。

そこで研究代表者(古閑)は、リヨン大学の庵原謙治氏との共同研究において、最も基本的なコンフォーマル超代数である $N=1$ 超ヴィラソロ代数の表現論に関する研究を行い、その結果を用いて $N=1$ 超ヴィラソロ代数を対称性とする共形場理論のフージョン則を決定した[雑誌論文①]。 $N=1$ 超ヴィラソロ代数の既約最高ウェイト表現から構成される頂点作用素超代数は、ヌブ・シュワルツセクターセクター以外のツイストセクターも込みでフージョン則が決定されている(数少ない)例となっている。従って今後の課題は、 $N=1$ 超ヴィラソロ代数以外のコンフォーマル超代数の表現論の解明およびその応用となる。

2. 研究の目的

上述の背景をふまえて、本研究では以下の二つの研究目的を設定した。

第一の研究目的は、コンフォーマル超代数の表現論を研究する上で必要不可欠な、ヴィラソロ代数の表現論に関連する。ヴィラソロ代数の表現論に関しては、既に30年以上の研究の歴史があり、多くの成果が得られている。しかしながら、本研究課題開始以前には、文献的に散逸した状態で、また重要な文献の中にも証明の細部に不完全な記述を含むものも見られた。そのため本研究では、(例えばヴィラソロ代数の表現論を専門としないような数学者にも)ヴィラソロ代数の表

現論全体を概観できるような文献を準備する事を、研究目的の一つとして設定した。このような文献は、今後コンフォーマル超代数の表現論の研究を効率的に行うためにも重要であると思われる。

第二の研究目的は、本研究課題のタイトルのコンフォーマル超代数に関連するものである。通常(超)リー代数の表現論において、既約最高ウェイト表現の指標の決定は、中心課題の一つであり、そのためにはヴァーマ加群と呼ばれる誘導表現が重要な役割を果たす。共形場理論への応用を考慮した場合、ヴァーマ加群の構造の決定は主要なステップであるがそれだけでは不十分であり、ヴァーマ加群の特異ベクトル(極大部分加群の生成系)の具体形に関する情報(特異ベクトル公式)も重要となってくる。そこで本研究では、 $N=1$ 超ヴィラソロ代数の次に基本的なコンフォーマル超代数である $N=2$ 超ヴィラソロ代数に関し、ヴァーマ加群の構造の決定とその特異ベクトル公式の導出を目指した研究を行う事とした。

3. 研究の方法

第一の研究目的の達成のため(庵原謙治氏との共同研究として)ヴィラソロ代数の表現論の基礎事項をまとめた図書を執筆する。

第二の研究目的で述べた $N=2$ 超ヴィラソロ代数の表現論に関しては、[雑誌論文①]で用いた $N=1$ 超ヴィラソロ代数の場合の手法を直ちに適用する事が困難な部分もある。そこで本研究では、ある圏同値(量子化されたドリinfeld・ソコロフ簡約化と呼ばれる)を通して、問題の一部をカツ・ムーディー超代数の表現論に帰着させる。より具体的には以下の3つのステップにより研究目的の達成を目指す。

- ① カツ・ムーディー超代数のヴァーマ加群の特異ベクトル公式の記述に必要な一般論(エンライト関手など)について準備する。
- ② ステップ1の結果を用いて、 $N=2$ 超ヴィラソロ代数と関連する超リー代数であるアフィン $(2|1)$ 型特殊線形超リー代数のヴァーマ加群の構造を調べる。
- ③ ステップ2の結果と上述の圏同値を用いて研究目的欄で述べた $N=2$ 超ヴィラソロ代数のヴァーマ加群の構造について調べる。

但し、本研究は元々4年間の研究期間を予定していたこと、及び第一の研究目的の達成を優先させた事から、研究期間内には上述のステップのうち、①までしか着手できなかった。

4. 研究成果

以下、雑誌論文及び図書として、本研究課題の実施期間に発表した論文および図書の内容について述べる。

[雑誌論文①] Fusion algebras for $N=1$ superconformal field theories through coinvariants $II+1/2$: Ramond sector

この論文では、以前に得られていた $N=1$ 超ヴィラソロ代数のヴァーマ加群に関する結果をもとに $N=1$ ヴィラソロ超代数の特異ベクトル公式とその応用を述べた。ここで用いた手法は本研究課題にも有効であると思われる。しかしこの論文の研究内容の大半は、本研究課題以前に得られていたものであるため、論文内容はここではこれ以上詳しくは述べない。

[雑誌論文②] Note on spin modules associated to \mathbb{Z} -graded Lie superalgebras

通常のヴィラソロ代数の場合、インターメディアイト系列と呼ばれるウェイト部分空間の次元がすべて1次元で構造が簡明な表現から、半無限積を考える事でより複雑な構造を持つフォック加群が構成される。しかしながら超リー代数の場合、表現の半無限積により表現が構成できることは自明ではない。この論文では、コンフォーマル超代数を含むような広いクラスの超リー代数について、ヴィラソロ代数の場合のインターメディアイト表現に類似の構造の簡明な表現から、半無限積を考察する事により、より複雑な構造の表現が構成できる事を示した。

[図書] Representation Theory of the Virasoro algebra,

コンフォーマル超代数はヴィラソロ代数の超リー代数としての拡大であるため、その表現論の研究には、ヴィラソロ代数の表現論が必要不可欠である。また、ヴィラソロ代数は、共形場理論のみならず数理論理学の様々な分野でも大変重要な役割を果たしている。この図書では、ヴィラソロ代数の表現論の中から特に重要だと思われるテーマを選び、その証明も含めて詳述した。具体的な内容は、

- ① ヴィット代数とその普遍中心拡大
- ② ウェイト部分空間の次元が有限次元となる既約表現の分類
- ③ ヴァーマ加群の構造
- ④ フォック加群の構造
- ⑤ ヴィラソロ代数の頂点作用素代数
- ⑥ ユニタリ表現

また同時に

- ① ホモロジー代数の基礎事項
- ② 既約表現の分類に必要な正標数の体上のリー代数の表現論
- ③ ヴァーマ加群やフォック加群の表現論

を展開する為に必要となるヤンツェンフィルターの基礎事項

- ④ 頂点作用素代数の基礎事項などについてもまとめた。

研究目的欄で述べた第二の研究目的に関連する研究成果は、本課題の研究期間内に学術雑誌に発表する事はできなかったが、ここでその成果についても述べておく。

研究方法欄で述べたように、コンフォーマル超代数の表現の圏と、アフィンカツ・ムーディー超代数の表現の圏の間の圏同値が存在する事が知られている。そこで一般のカツ・ムーディー超代数のヴァーマ加群の構造の解明を目的に以下の研究を行った。

- ① スーパー版2項係数と呼ぶべきものを導入し、その性質を調べた。
- ② ①を用いて、等方的でない(長さが0でない)ルートに対して、エンライト関手と呼ばれる表現の圏の間の関手を構成した。なおその構成には、非可換な環の局所化を用いる。
- ③ ②の関手を用いて、ヴァーマ加群の間の準同型写像の一意性を、等方的なルートを含まないようなカツ・ムーディー超代数の場合に示した。
- ④ 通常のカツ・ムーディー代数の場合にマリコフ・フェイギン・フックスにより与えられた、シュバレー生成元の複素数ベキを用いた特異ベクトル公式について、エンライト関手を用いた解釈を(カツ・ムーディー代数および等方的なルートを含まないようなカツ・ムーディー超代数の場合に)与えた。

現時点では、上記で得られた結果の大部分は、超リー代数を等方的なルートを含まないようなカツ・ムーディー超代数に制限している。コンフォーマル超代数の研究には、等方的なルートをもつカツ・ムーディー超代数の表現論が重要であり、それに関しては今後の課題である。なおこの研究もリヨン大学の庵原氏との共同研究であり、現在論文を学術雑誌に投稿中である。

最後に、本研究課題の研究目的の達成状況を簡単にまとめる。

- ① 第一の目的に関しては、[図書]にある学術書の出版により研究目的が達成されたと考えている。
- ② 第二の研究目的に関しては、第一の研究目的である学術書の準備に予定していたよりもかなり多くの時間がかかってしまったこと、及び、本研究は、申請時は4年の研究期間を予定していたという理由から、成果が上がったのは、研究方法欄で述べた第1ステップの部分のみであった。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 2 件)

- ① K Iohara, Y. Koga, Fusion algebras for $N=1$ superconformal field theories through coinvariants $II+1/2$: Ramond sector, International Mathematics Research Notices, 13, 2374-2416, (2009) 査読あり
- ② K Iohara, Y. Koga, Note on spin modules associated to Z -graded Lie superalgebras, Journal of Mathematical physics, 50, 103508 (9 pp.), (2009) 査読有り

[学会発表] (計 1 件)

古閑 義之 Fusion algebras for $N=1$ superconformal algebras: Ramond sector, 代数群と量子群の表現論研究集会, 2010年6月4日, すいとぴあ江南

[図書] (計 1 件)

K Iohara, Y. Koga, Representation Theory of the Virasoro algebra, Springer, (2011) 474 pp.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

古閑 義之 (KOGA YOSHIYUKI)

福井大学・大学院工学研究科・准教授

研究者番号：20338429