

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年 6月 5日現在

機関番号：13901
 研究種目：若手研究(B)
 研究期間：2009～2011
 課題番号：21740010
 研究課題名（和文）
 整環の表現論
 研究課題名（英文）
 Representation theory of orders
 研究代表者
 伊山 修 (IYAMA OSAMU)
 名古屋大学・多元数理科学研究科・教授
 研究者番号：70347532

研究成果の概要（和文）：

高次元 Auslander-Reiten 理論を研究した。研究成果は合計 21 本の論文（うち査読付き 16 本）として出版し、国内外の研究集会やセミナーで 51 回の講演を行った（うち招待講演 41 回）。2010 年 3 月に 2010 年度日本数学会春季賞を受賞した。受賞題目は「多元環および Cohen-Macaulay 加群の表現に関する研究」。また 2011 年 3 月に、第 7 回日本学術振興会賞を受賞した。受賞題目は「整環の表現論」。

研究成果の概要（英文）：

I studied higher dimensional Auslander-Reiten theory. My results were published in 16 papers (11 papers were refereed). I gave 51 lectures in international or domestic conferences and seminars (41 lectures were invited lectures). In March 2010, I got Spring prize of Japanese mathematical society by “Study of representation theory of algebras and Cohen-Macaulay modules”. On 2011 March, I got JSPS prize by “Representation theory of orders”.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2009 年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2010 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2011 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
総計	3,200,000	960,000	4,160,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：高次元 Auslander-Reiten 理論、箆（クイバー）、Cohen-Macaulay 加群、団（クラスター）傾部分圏、 n 有限表現型、団（クラスター）圏、Calabi-Yau 三角圏、導来圏、傾理論、変異、準傾対象、非可換特異点解消、団（クラスター）代数

1. 研究開始当初の背景

多元環の表現論、特に d 次元完備正則局所環 R 上の整環 (R 多元環のうち R 加群として有限生成射影的なもの) の表現論を研究する。ここで R 整環 A の表現論とは (極大) Cohen-Macaulay A 加群 (= A 格子 = A 加群のうち R 加群として有限生成射影的なもの) の成す加法圏 $CM(A)$ の構造解析を通して A

を研究する事を意味する。これは箆（クイバー）や有限群の表現に代表される有限次元多元環 ($d=0$ の場合) と、可換 Cohen-Macaulay 環 (A が可換な場合) を統一する枠組みであり、相互に影響しあいつつ着実に発展を続けている分野である。

2. 研究の目的

多元環の表現論における基本理論は、1970年代に M. Auslander が I. Reiten と共に創始した Auslander-Reiten 理論だが、これは圏 $CM(A)$ 上の関手圏を考察する事により、 $CM(A)$ の圏構造の基本単位となる概分裂完全列と既約写像を浮かび上がらせるものである。特に A が孤立特異点 (= 任意の極大でない素イデアル p に対して A_p の大域次元と R_p の Krull 次元が一致する) の場合に Auslander-Reiten 箎とよばれる圏 $CM(A)$ の構造を視覚化した図を描く事が可能となる。直既約 Cohen-Macaulay A 加群の同型類が有限個である場合、 A を有限表現型と呼ぶ。例えば 2 次元商特異点は有限表現型であり、その Auslander-Reiten 箎は群の McKay 箎と一致する。有限表現型は $CM(A)$ の圏構造が最も簡単な場合であり、 $d=0$ の場合には Auslander 対応と呼ばれる「有限表現型多元環の全体」と「Auslander 多元環の全体」の間の一対一対応が存在する。これは関手圏を基本とした Auslander-Reiten 理論の雛形を与える重要な定理である。

本研究の主目的は、以上の Auslander-Reiten 理論の高次元化を研究することである。

3. 研究の方法

高次元 Auslander-Reiten 理論とは、圏 $CM(A)$ の代わりに、その n 団 (クラスター) 傾部分圏 (極大 $(n+1)$ 直交部分圏) を調べる事により A を理解する事を目的とする。ここで n は自然数である。1 団傾部分圏は $CM(A)$ 自身に他ならない。Auslander 対応の $(n+1)$ 次元版である「 n 団傾部分圏の全体」と「 n -Auslander 多元環の全体」の間の一対一対応が存在し、また n 団傾部分圏においては n 概分裂完全列の存在定理が成立する。 $n=d-1$ となる場合が特に重要であり、この時は n 団傾部分圏において n 概分裂完全列を補完する n 基本列が存在するため、 n 団傾部分圏の構造の対称性が極めて高いものとなる。重要な例としては、商特異点が自然な $(d-1)$ 団傾部分圏を持つ事が挙げられる。団傾部分圏の概念は、団 (クラスター) 代数の圏論化や非可換特異点解消にも応用がなされている。

4. 研究成果

[1] 大域次元が n である有限次元多元環に対して「 n 有限表現型」の概念を導入し基礎理論を構築した。古典的な Gabriel の定理により、1 有限表現型多元環は、Dynkin 型箎の道多元環として分類される。

Oppermann との共同研究で、傾理論において基本的な APR (=Auslander-Platzbeck-Reiten) 傾加群を一般化した、 n -APR 傾加群を導入し基本的な性質を調べた。特に n 有限表現性が、 n -APR 傾加群の自己準同型環をとる操作で保たれることを示した。また n 有限表現型多元

環の $(n+1)$ 前射影多元環は、自己入射的となること、 $n=2$ の場合は逆も成立することを示した。さらに、 n 有限表現型多元環の $(n+1)$ 前射影多元環の安定加群圏は $(n+1)$ -Calabi-Yau 性を有すること、より強く、安定 n -Auslander 多元環の $(n+1)$ -団圏と三角同値であることを示した。

Herschend との共同研究で、 n 有限表現型多元環はねじれ分数的 Calabi-Yau 性を満たすことを示した。さらに Calabi-Yau 次元が特別な数値の場合には、逆も成立することを示した。特に、斉次的な n 有限表現型多元環と m 有限表現型多元環のテンソル積は、 $(n+m)$ 有限表現型であることが従う。さらに 2 有限表現型多元環を、自己入射的なポテンシャル付き箎の切断ヤコビ多元環として特徴付ける構造定理を与えた。さらにポテンシャルの自己入射性が中山軌道に沿った変異で保たれることを示し、その応用として数多くの 2 有限表現型多元環を構成することに成功した。

[2] Cohen-Macaulay 環に対し、団傾加群を研究した。従来は孤立特異点の場合に限定して研究を進めていたが、Wemyss との共同研究において古典的な Auslander-Reiten 双対性を孤立特異点とは限らない場合に拡張する事に成功し、その応用として一般の Cohen-Macaulay 環上の団傾加群に対して、導来圏同値および変異に関する基礎理論を構築した。特に 2 つの非可換特異点解消が「深さ条件」を満たしている場合に、それらが導来圏同値であることを示した。これより 3 次元の場合には全ての非可換特異点解消が導来圏同値であることが従う。

さらに団傾加群と非可換特異点解消の一般化として (極大) modification 加群 (多元環) について研究を行い、特に modification 加群の変異を導入した。3 次元の場合には、全ての極大 modification 多元環が導来圏同値である事を証明した。さらに以前の研究成果を一般化して、 $K[x, y, u, v]/(f(x, y) - uv)$ 上の極大 modification 加群の分類を与える事に成功した。

[3] Auslander-Reiten 理論における古典的事実として、単純特異点 R と、対応する Dynkin 型箎の道多元環 KQ に対して、Cohen-Macaulay R -加群の安定圏と、 KQ の 1 団圏の間の三角圏同値が存在する (代数的 McKay 対応)。Amiot, Reiten との共同研究でこれを体系的な枠組みで捉えなおし、Gorenstein パラメータ 1 の d -Calabi-Yau 多元環のある条件を満たす巾等元 e に対して、 eAe 上の Cohen-Macaulay 加群の安定圏と、有限次元多元環 A_0/e の $(d-1)$ 団圏の間の三角圏同値として、大幅に一般化した。

[4] 以下、その他の研究成果を挙げる。

Wemyss との共同研究で、(Gorenstein と限らない) 有理特異点に対して、特殊 Cohen-Macaulay 加群の圏から三角圏を構成した。加藤-宮地との共同研究で、環上の非有界ホモトピー圏のある商圏に対して、安定 t 構造を構成し、別のある環上の安定 Cohen-Macaulay 圏と三角同値になることを示した。井上-Keller-国場-中西との共同研究で、団代数を応用して (simply-laced と限らない) Y -system および T -system の周期性を示した。相原との共同研究で、準傾変異 (silting mutation) を導入し、その基礎理論を構築した。特に半順序に関する Riedtmann-Schofield, Happel-Unger の理論を準傾変異に対して一般化した。高橋との共同研究で、孤立商特異点上の Cohen-Macaulay 加群の安定圏に傾対象が存在することを示した。Amiot, Reiten, Todorov との共同研究で、籠の道多元環上の有限なねじれ部分圏と、Coxeter 群の元で c -sortable と呼ばれるものとの一対一対応を与えた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 21 件)

(1) Aslak Buan, Osamu Iyama, Idun Reiten, Jeanne Scott, Cluster structures for 2-Calabi-Yau categories and unipotent groups, *Compos. Math.* 145 (2009), no. 4, 1035--1079. 査読有り

(2) Rei Inoue, Osamu Iyama, Atsuo Kuniba, Tomoki Nakanishi, Junji Suzuki, Periodicities of T -systems and Y -systems, *Nagoya Math. J.* 197 (2010), no. 1, 59--174. 査読有り

(3) Osamu Iyama, 前射影多元環の傾理論, 2009 年代数幾何学シンポジウム報告集 (2009), 60--64. 査読無し

(4) Osamu Iyama, Ryo Takahashi, Tilting and cluster tilting for quotient singularities, 第 31 回可換環論シンポジウム報告集 (2009), 154--157. 査読無し

(5) Osamu Iyama, 整環の表現論-高次元 Auslander-Reiten 理論-, 2010 年度日本数学会年会総合講演・企画特別講演アブストラクト (2010), 1--16. 査読無し

(6) Osamu Iyama, Michael Wemyss, The classification of special Cohen-Macaulay

modules, *Math. Z.* 265 (2010), no. 1, 41--83. 査読有り

(7) Osamu Iyama, Cluster tilting for higher Auslander algebras, *Adv. Math.* 226 (2011), no. 1, 1--61. 査読有り

(8) Osamu Iyama, Stable categories of Cohen-Macaulay modules and cluster categories, *Oberwolfach Report* (2010), 1338--1341. 査読無し

(9) Osamu Iyama, Idun Reiten, 2-Auslander algebras associated with reduced words in Coxeter groups, *Int. Math. Res. Not. IMRN* 2011, no. 8, 1782--1803. 査読有り

(10) Martin Herschend, Osamu Iyama, n -representation-finite algebras and twisted fractionally Calabi-Yau algebras, *Bull. Lond. Math. Soc.* 43 (2011), no. 3, 449--466. 査読有り

(11) Aslak Buan, Osamu Iyama, Idun Reiten, David Smith, Mutation of cluster-tilting objects and potentials, *Amer. J. Math.* 133 (2011), no. 4, 835--887. 査読有り

(12) Osamu Iyama, Stable categories of preprojective algebras and cluster categories, *Oberwolfach Report* (2011), 600--603. 査読無し

(13) Osamu Iyama, Steffen Oppermann, n -representation-finite algebras and n -APR tilting, *Trans. Amer. Math. Soc.* 363 (2011), no. 12, 6575--6614. 査読有り

(14) Martin Herschend, Osamu Iyama, Selfinjective quivers with potential and 2-representation-finite algebras, *Compos. Math.* 147 (2011), no. 6, 1885--1920. 査読有り

(15) Osamu Iyama, Kiriko Kato, Jun-ichi Miyachi, Recollement of homotopy categories and Cohen-Macaulay modules, *J. K-Theory* 8 (2011), no. 3, 507--542. 査読有り

(16) Claire Amiot, Osamu Iyama, Idun Reiten, Gordana Todorov, Preprojective algebras and c -sortable words, *Proc. Lond. Math. Soc.* 104 (2012), no. 3, 513--539. 査読有り

(17) Takuma Aihara, Osamu Iyama, Silting

mutation in triangulated categories, to appear in J. Lond. Math. Soc. 掲載確定, 査読有り

(18) Osamu Iyama, Michael Wemyss, A New Triangulated Category for Rational Surface Singularities, to appear in Illinois J. Math. 掲載確定, 査読有り

(19) Rei Inoue, Osamu Iyama, Bernhard Keller, Atsuo Kuniba, Tomoki Nakanishi, Periodicities of T and Y-systems, dilogarithm identities, and cluster algebras I: Type B_r , to appear in Publ. Res. Inst. Math. Sci. 掲載確定, 査読有り

(20) Rei Inoue, Osamu Iyama, Bernhard Keller, Atsuo Kuniba, Tomoki Nakanishi, Periodicities of T and Y-systems, dilogarithm identities, and cluster algebras II: Type C_r , F_4 , and G_2 , to appear in Publ. Res. Inst. Math. Sci. 掲載確定, 査読有り

(21) Osamu Iyama, Michael Wemyss, On the Noncommutative Bondal-Orlov Conjecture, to appear in J. Reine Angew. Math. 掲載確定, 査読有り

[学会発表] (計 51 件)

(1) Osamu Iyama, Introduction to cluster tilting in 2-Calabi-Yau categories, 12nd Symposium on Representation Theory of Algebraic groups and Quantum groups (招待講演), May 10-15, 2009, Katsuura, Japan.

(2) Osamu Iyama, Cluster tilting in singularity theory I, Workshop on Triangulated Categories and Singularities (招待講演), May 25-30, 2009, Universitaet Paderborn, Germany.

(3) Osamu Iyama, n-representation-finite algebras, Homological and geometric methods in algebra (招待講演), August 10-14, 2009, Norwegian University of Technology and Science, Trondheim, Norway.

(4) Osamu Iyama, Auslander algebras, preprojective algebras and Calabi-Yau algebras, Noncommutative Algebraic Geometry and Related Topics (招待講演), August 24-28, 2009, Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto, Japan.

(5) Osamu Iyama, Cluster tilting theory,

Representation Theory and Combinatorics (招待講演), August 31-September 4, 2009, Morningside Center of Mathematics, Beijing, China.

(6) Osamu Iyama, T-systems, cluster algebras and cluster categories IV, q-変形された対称関数とその周辺 (招待講演), 2009年9月9-12日, 富士教育研究所.

(7) Osamu Iyama, Cluster tilting, 琉球大学セミナー, 2009年10月8-13日, 琉球大学.

(8) Osamu Iyama, Cluster tilting for non-isolated singularities, Kinosaki Symposium on Algebraic Geometry (招待講演), October 26-30, 2009, Kinosaki, Japan.

(9) Osamu Iyama, Cluster tilting for hypersurface singularities, Seminar on Cohen-Macaulay modules, November 22-23, 2009, Osaka Prefecture University, Japan.

(10) Osamu Iyama, Tilting and cluster tilting for quotient singularities, The 31st Symposium on Commutative Algebra, November 24-27, 2009, Hotel Awina-Osaka, Japan.

(11) Osamu Iyama, Stable categories of Cohen-Macaulay modules, Advanced School and Conference on Homological and Geometrical Methods in Representation Theory (招待講演), January 18-February 5, 2010, International Center for Theoretical Physics, Trieste, Italy.

(12) Osamu Iyama, 整環の表現論 -高次元 Auslander-Reiten 理論-, 2010年度日本数学会年会, 春季賞受賞講演 (招待講演), March 25, 2010, Keio University, Japan.

(13) Osamu Iyama, 2-Auslander algebras associated with reduced words in Coxeter groups, Interplay between representation theory and geometry (招待講演), 05/06/10, 清華大学.

(14) Osamu Iyama, Stable categories of Cohen-Macaulay modules and cluster categories, Interactions between Algebraic Geometry and Noncommutative Algebra (招待講演), 05/14/10, Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach.

(15) Osamu Iyama, Stable categories of Cohen-Macaulay modules and cluster categories, セミナー(招待講演), 05/17/10, Universitaet Bonn.

(16) Osamu Iyama, Selfinjective quivers with potential and 2-representation-finite algebras, セミナー(招待講演), 05/18/10, Universitaet Koeln.

(17) Osamu Iyama, Triangulated categories in representation theory of associative algebras (招待講演), Lefschetz fibration and category theory, 06/05/10, 大阪大学.

(18) Osamu Iyama, 籠の変異と団傾理論(招待講演), 談話会, 06/24/10, 筑波大学.

(19) Osamu Iyama, Stable categories of Cohen-Macaulay modules and cluster categories, XIV International Conference on Representations of Algebras and Workshop, 08/11/10, National Olympics Memorial Youth Center.

(20) Osamu Iyama, Stable categories of Cohen-Macaulay modules and cluster categories (招待講演), Test problems for the theory of finite dimensional algebras, 09/16/10, Banff International Research Station.

(21) Osamu Iyama, 1. n-representation-finite algebras, 2. n-representation-infinite algebras and application to representation dimension, 3. Cluster tilting in 2-Calabi-Yau triangulated categories, 連続講演(招待講演), September 25, 28, 30, 2010, 南京大学.

(22) Osamu Iyama, Silting mutation in triangulated categories, 談話会(招待講演), 09/27/10, 南京師範大学.

(23) Osamu Iyama, 1. Representation theory of Cohen-Macaulay modules I: Classical theory, 2. Representation theory of Cohen-Macaulay modules II: Connection to cluster categories, 連続講演(招待講演), October 3, 6, 2010, 清華大学.

(24) Osamu Iyama, Quiver mutation and cluster tilting, 談話会(招待講演), 10/08/10, 清華大学.

(25) Osamu Iyama, Cotilting modules VS Canonical module, 第3回大和郡山セミナー(招待講演), Novemer 14, 2010, 奈良高専.

(26) Osamu Iyama, Calabi-Yau triangulated categories and Cluster tilting, Derived categories, mirror symmetry and McKay correspondence Seminar (招待講演), November 29, 30, 2010, IPMU.

(27) Osamu Iyama, Stable categories of Cohen-Macaulay modules and cluster categories, Shanghai workshop on representation theory, 12/11/10, 華東師範大学.

(28) Osamu Iyama, Stable categories of Cohen-Macaulay modules and cluster categories (招待講演), Derived Categories 2011 Tokyo, January 24-28, 2011, 東京大学.

(29) Osamu Iyama, Tilting theory and Cohen-Macaulay modules, 第5回岡山大学環論セミナー, 02/14/11, 岡山大学.

(30) Osamu Iyama, Stable categories of Cohen-Macaulay modules and cluster categories, Representation Theory of Quivers and Finite Dimensional Algebras (招待講演), 02/22/11, Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach.

(31) Osamu Iyama, Algebraic McKay correspondence and cluster tilting, Workshop on non-commutative geometry and the McKay correspondence, 03/15/11, 名古屋大学.

(32) Osamu Iyama, Stable categories of Cohen-Macaulay modules and cluster categories, セミナー, 03/24/11, Norges Teknisk-Naturvitenskapelige Universitet.

(33) Osamu Iyama, Tilting and cluster tilting for stable categories of Cohen-Macaulay modules, Workshop on Matrix Factorizations (招待講演), 05/07/11, University of Bielefeld.

(34) Osamu Iyama, Tilting and cluster tilting for stable categories of Cohen-Macaulay modules, 大阪表現論セミナー(招待講演), 05/16/11, 大阪市立大学.

(35) Osamu Iyama, Higher preprojective algebras and their stable categories, 大

阪市立大学代数学セミナー（招待講演），05/17/11，大阪市立大学.

(36) Osamu Iyama, Tilting and cluster tilting for Cohen-Macaulay modules, 第5回大和郡山セミナー（招待講演），05/22/11, 奈良高専.

(37) Osamu Iyama, Cluster algebras and categorification, Infinite Analysis 11 (招待講演)，07/29/11, University of Tokyo.

(38) Osamu Iyama, Auslander-Reiten duality for Cohen-Macaulay modules, 第8回可換環論サマースクール, 08/24/11, 名古屋大学.

(39) Osamu Iyama, Calabi-Yau reduction for hypersurface singularities, カンザス大学代数学セミナー（招待講演），08/30/11, カンザス大学.

(40) Osamu Iyama, Auslander-Reiten duality and maximal modification algebras for non-isolated singularities, リンカーン大学代数学セミナー（招待講演），09/01/11, リンカーン大学.

(41) Osamu Iyama, Tilting and cluster tilting for stable categories of Cohen-Macaulay modules, Noncommutative Algebraic Geometry (招待講演)，09/16/11, Fudan University.

(42) Osamu Iyama, n -representation infinite algebras, Shanghai Conference on Representation Theory of Algebras (招待講演)，10/03/11, Shanghai Jiao Tong University.

(43) Osamu Iyama, 3回連続講演, Auslander correspondence and n -representation finite algebras, Higher preprojective algebras and quivers with potential, n -representation infinite algebras, 第10回静岡代数学セミナー（招待講演），December 2-4, 2011, 静岡大学.

(44) Osamu Iyama, 安定圏, 導来圏, 団圏 - 環論の世界の拡がり -, 信州代数談話会（招待講演），12/07/11, 信州大学.

(45) Osamu Iyama, ポテンシャル付き籠と APR 傾加群, 信州代数セミナー（招待講演），12/08/11, 信州大学.

(46) Osamu Iyama, 準傾理論入門, 第2回徳山環論セミナー（招待講演），01/08/12, 徳山高専.

(47) Osamu Iyama, Mutation in triangulated categories, 第7回代数・解析・幾何学セミナー（招待講演），02/16/12, 鹿児島大学.

(48) Osamu Iyama, Pseudo-tilting theory, Representation Theory of Chevalley Groups and Related Topics (招待講演)，03/15/12, 名古屋大学.

(49) Osamu Iyama, n -representation infinite algebras, エジンバラ大学代数学セミナー（招待講演），03/20/12, エジンバラ大学.

(50) Osamu Iyama, Stable categories of Cohen-Macaulay modules and cluster categories, グラスゴー大学代数学セミナー（招待講演），03/22/12, グラスゴー大学.

(51) Osamu Iyama, τ -tilting theory, Cluster categories and cluster tilting (招待講演)，03/28/12, ノルウェー理工科大学.

〔その他〕

ホームページ等

<http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~iyama>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

伊山 修 (IYAMA OSAMU)

名古屋大学・多元数理科学研究科・教授

研究者番号：70347532