

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 24 年 6 月 11 日現在

機関番号：32652

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2009 ~ 2011

課題番号：21740011

研究課題名（和文） 頂点作用素代数を用いたフィッシャー群の研究

研究課題名（英文） Fischer groups based on vertex operator algebras

研究代表者

山内 博（YAMAUCHI HIROSHI）

東京女子大学・現代教養学部・講師

研究者番号：40452213

研究成果の概要(和文): 24 次のフィッシャー群が作用する頂点作用素代数 VF について調べ、フィッシャー群の互換類と頂点作用素代数 VF の中心電荷  $6/7$  のヴィラソロ頂点作用素部分代数との間の対応関係を明らかにした。この対応関係に基づいて 24 次フィッシャー群の 3 互換性や E6 型拡大ディンキン図形との間に成り立つ対応関係を頂点作用素代数の視点から説明する結果を得た。同様の研究をベビーモンスター単純群とそれが作用する頂点作用素超代数 VB に対しても行い、ベビーモンスター単純群の互換類と中心電荷  $7/10$  のヴィラソロ代数との関係を明らかにし、その 4 互換性や E7 型拡大ディンキン図形との関係を頂点作用素代数の視点から説明する結果を得た。また、グライス代数上の松尾・ノートンの跡公式を拡大されたグライス代数上へと一般化を行い、新たな跡公式とその散在型有限単純群への応用を発見した。

研究成果の概要(英文): We study the vertex operator algebra VF which affords a natural action of the largest Fischer group of degree 24. We discovered a correspondence between the transpositions of the Fischer group and  $c=6/7$  Virasoro vertex operator subalgebras of VF. Based on this correspondence, we obtained a framework which enables us to explain the 3-transposition property of the Fischer group and a mysterious relation between the largest Fischer group and the extended E6 Dynkin diagram. We also study the vertex operator superalgebra VB which affords a natural action of the Baby-monster sporadic simple group and found a one-to-one correspondence between the transpositions of the Baby-monster and  $c=7/10$  Virasoro vertex operator subalgebras of VB. The 4-transposition property of the Baby-monster and its relation to the extended E7 Dynkin diagram is also explained via our results. We derived trace formulae for the extended Griess algebras which generalize the Matsu-Norton trace formulae and we found its fruitful applications to the sporadic finite simple groups.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2009 年度	1,300,000	390,000	1,690,000
2010 年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2011 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：フィッシャー群、頂点作用素代数、散在型有限単純群、ヴィラソロ代数

## 1. 研究開始当初の背景

- (1) 頂点作用素代数におけるガロア対応とシュアー・ワイル型双対性により、頂点作用素代数の自己同型はその不動点部分代数による既約分解によって与えられる。中心電荷  $1/2$  のヴィラソロ頂点作用素代数による既約分解から得られる位数  $2$  の自己同型がこれまでの研究の中心であった。
- (2)  $3$  互換群にはフィッシャー空間と呼ばれる幾何構造が付随している。最も簡単な斜交型と呼ばれるクラスについては中心電荷  $1/2$  のヴィラソロ頂点作用素代数を用いて頂点作用素代数の部分構造としてフィッシャー空間の構造を見出す松尾氏の先行研究があった。
- (3)  $24$  次のフィッシャー群が自然に作用する頂点作用素代数  $VF$  が見付き、フィッシャー群の作用は中心電荷が  $1/2$  ではなく  $6/7$  のヴィラソロ頂点作用素代数による既約分解を用いて実現されることが分かりつつあった。また、ベビーモンスター単純群と中心電荷  $7/10$  のヴィラソロ頂点作用素代数との関係も明らかになりつつあった。このように種々のヴィラソロ頂点作用素代数と散在型有限単純群との関係が研究代表者により調べられていた。

## 2. 研究の目的

- (1) 中心電荷  $6/7$  のヴィラソロ頂点作用素代数を含む種々の部分代数を用いることでフィッシャー群を含む散在型  $3$  互換群を頂点作用素代数上の自己同型として実現し、そのフィッシャー空間など、散在型有限単純群固有の構造を頂点作用素代数を通じて解析することが本研究の主目的であった。
- (2)  $24$  次のフィッシャー群の互換類と  $E6$  型拡大ディンキン図形との間には不思議な対応関係があることが知られている。頂点作用素代数  $VF$  の構造論を通じ、フィッシャー群と  $E6$  型拡大ディンキン図形との関係を明確にすることも本研究のもう一つの目的である。

## 3. 研究の方法

頂点作用素代数の研究は大きくは表現論と構造論の二つに分けることができる。現状では表現論が主流派であり、構造論はその困難さもあってそれほど進展がない。本研究で対象となるのは頂点作用素代数上の自己同型であり、通常これは構造論に分類されるが、我々は部分頂点作用素代数の表現論を活用して自己同型を構成する手法を用いるため、構造論と表現論のどちらの研究も行う。

- (1) モンスター単純群が作用するムーンシャイン頂点作用素代数、ベビーモンスター単純群が作用するベビーモンスター頂点作用素超代数  $VB$ 、 $24$  次のフィッシャー群が作用する頂点作用素代数  $VF$  など、散在型有限単純群が作用する頂点作用素(超)代数はその次数  $1$  の空間が自明であり、その構造解析にリー代数の表現論を用いることができない。しかしこの場合、次数  $2$  の空間にはグライス代数と呼ばれる可換だが非結合的な代数構造が入る。グライス代数の構造は頂点作用素代数全体の構造を大きく規定するものと考えられている。本研究では特にヴィラソロ頂点作用素代数との関係性からその冪等元の研究を対象とし、冪等元で生成される部分代数の構造を調べる。
- (2) 種々のヴィラソロ頂点作用素代数を交換団構成法を用いて構成し、そのフュージョン規則を用いて定義される宮本の自己同型を考察する。交換団構成法により既知の宮本の自己同型の  $6$  互換性が  $3$  互換性、 $4$  互換性へと伝搬する機構を表現論、構造論の両方を駆使して調べた。
- (3) 次数  $1$  の空間が自明な場合、松尾・ノートンの跡公式がグライス代数上で成立する。その応用・拡張を探求することで頂点作用素代数の構造論とその自己同型群の指標理論との関連も調べた。拡大されたグライス代数上の跡公式の研究において大量の高次多変数多項式を扱う必要が出てきたが、その処理には計算機を有効に活用して対処した。

#### 4. 研究成果

- (1) 24 次のフィッシャー群が作用する頂点作用素代数 VF を詳細に調べた。フィッシャー群の互換類の作用は中心電荷  $6/7$  のヴィラソロ頂点作用素代数によって実現される。その 3 互換性の起源を研究し、次の一般的な事実を見出した。中心電荷  $1/2$  のヴィラソロ頂点作用素代数から作られる自己同型群の 6 互換性が、ある設定のもとではその作用を交換団部分代数に制限した時、3 互換性に還元されることが証明できた。この定理を頂点作用素代数 VF に適用した場合が 24 次フィッシャー群の 3 互換性である。また、24 次フィッシャー群と E6 型拡大ディンキン図形との関係を明らかにすべく、頂点作用素代数 VF のグライス代数において中心電荷  $6/7$  のヴィラソロ代数に対応する冪等元で生成される部分代数には E6 型格子に付随する頂点作用素代数の構造が組み込まれていることを明らかにできた。以上の結果をまとめて論文として発表した。
- (2) 上記と同様の手法でベビーモンスターが作用する頂点作用素超代数 VB を調べ、ベビーモンスターの互換類と中心電荷  $7/10$  との対応関係や、その 4 互換性を説明する理論を得た。また、頂点作用素超代数 VB のグライス代数において中心電荷  $7/10$  のヴィラソロ代数に対応する冪等元で生成される部分代数には E7 型格子に付随する頂点作用素代数の構造が組み込まれていることも明らかにした。以上の結果をまとめて論文として発表した。
- (3) (1), (2) の研究過程においてグライス代数およびそれを拡張した代数を調べた。特に冪等元から定まる自己同型を調べるために、松尾・ノートンの跡公式を頂点作用素超代数へ拡張する必要性を見出し、共形デザインの構造に基づいて新しい跡公式を導出した。この結果は純粋に頂点作用素代数の構造論によるものである。頂点作用素代数の構造はとても複雑で、その一般論の研究は困難を極めるが、導出した跡公式はその複雑さを反映するため、頂点作用素代数についての多くの情報を引き出すものである。そのため、今後対称性の高い頂点作用素代数を探求する上で本

公式は大いに役立つものと考えられる。この結果は近々論文としてまとめて発表する予定である。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 3 件)

Gerald Hoehn, Ching Hung Lam and Hiroshi Yamauchi, McKay's E6 observation on the largest Fischer group, Communications in Mathematical Physics 査読有 310 Vol. 2, 329-365., 2012 DOI: 10.1007/s00220-011-1413-8

Gerald Hoehn, Ching Hung Lam and Hiroshi Yamauchi, McKay's E7 Observation on the Baby Monster, International Mathematics Research Notices 査読有 Vol. 2012 166-212 (2012), doi: 10.1093/imrn/rnr009

Ching Hung Lam and Hiroshi Yamauchi, The FLM conjecture and framed VOA, Vertex operator algebras and related areas, 125-138, Contemporary Mathematics 査読有 497, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009.

[学会発表](計 12 件)

山内博, 拡大グライス代数と松尾-ノートンの跡公式, 有限群とその表現、頂点作用素代数、組合せ論の研究集会, 2012 年 3 月 5 日, 京都大学数理解析研究所

山内博, 3A 代数と 3 互換群, 有限群と頂点作用素代数, 2012 年 2 月 17 日, 東京女子大学

山内博, Matsuo-Norton trace formula for vertex operator superalgebras, Conference on Vertex Operator Algebras, Finite Groups and Related Topics, 2011 年 12 月 19 日, Institute of Mathematics, Academia Sinica (台湾)

山内博, Trace identity and axial vectors for the Baby-monster, Conformal Field Theory, Automorphic Forms and Related Topics, 2011 年 9 月 19 日, The

MAThematics Center Heidelberg,  
Heidelberg University (ドイツ)

山内博, 3 互換群に関連する代数, 第 23  
回有限群論草津セミナー, 2011 年 7 月 31  
日, 草津セミナーハウス

山内博, 枠付き頂点作用素代数入門, 第  
54 回 Encounter with Mathematics,  
2010 年 10 月 1 日, 中央大学

山内博, 有限群と軌道体理論, 第 22 回有  
限群論草津セミナー, 2010 年 7 月 30 日,  
草津セミナーハウス

山内博, 散在型有限単純群と頂点作用素  
代数, 日本数学会 2010 年度年会, 2010 年  
3 月 27 日, 慶應義塾大学

山内博,  $n$ -transposition groups and  
vertex operator algebras, Lie algebras,  
vertex algebras and automorphic forms,  
2009 年 9 月 4 日, 15 South College  
Street, Edinburgh (スコットランド)

山内博, Admissible representation of  
affine VOAs and modular invariance,  
Algebras, Groups and Geometries 2009,  
2009 年 8 月 20 日, 玉原国際セミナーハ  
ウス

山内博, 互換群と巾等元, 第 21 回有限群  
論草津セミナー, 2009 年 8 月 3 日, 草津  
セミナーハウス

山内博,  $n$ -transposition groups and  
vertex operator algebras, 第 12 回代数  
群と量子群の表現論研究集会, 2009 年 5  
月 14 日, 休暇村南紀勝浦

[その他]

ホームページ (プレプリントを公開中)

<http://www.math.twcu.ac.jp/~yamauchi/index.html>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

山内 博 (YAMAUCHI HIROSHI)

東京女子大学・現代教養学部・講師

研究者番号: 40452213