様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成２５年　６月　３日現在

機関番号：14301
研究種目：若手研究（B）
研究期間：2009　～　2012
課題番号：21740012
研究課題名（和文）代数多様体の高さのアラケロフ幾何的視点による研究とその応用

研究課題名（英文）Research on heights on algebraic varieties from the viewpoint of Arakelov geometry and its application

研究代表者
山木　壱彦　（YAMAKI KAZUHIKO）
京都大学・高等教育研究開発推進機構・准教授
研究者番号：80402973

研究成果の概要（和文）：式で定義された図形（代数多様体）には，「高さ」と呼ばれるその点や部分多様体の算術的複雑さを測る関数がある．高さを調べることにより，代数多様体の複雑度を記述することができる．また，代数多様体における小さな点の分布の様子と代数多様体の幾何的性質との関連の考察もできる．本研究では，幾つかの対象に対し高さや関連する事項を調べることによって，高さ自身やそれを用いた算術的性質の研究に大きな成果を得た．

研究成果の概要（英文）：On an algebraic variety, which is a geometric object defined by algebraic equations, we sometimes have “height functions”. These height functions measure arithmetic complexity of varieties. Using them, we can study relationships between the distribution of small algebraic points and the geometric property of the variety. In this research, we investigated the heights of some important subjects in algebraic geometry. Furthermore, we applied the results on heights to interesting arithmetic problems, obtaining significant results.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2009 年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2010 年度	700,000	210,000	910,000
2011 年度	700,000	210,000	910,000
2012 年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
総　計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・代数学
キーワード：代数幾何

１．研究開始当初の背景

代数多様体の算術的研究において，高さの重要性は良く知られている．例えば，ノースコットの定理は有理点の有限性を論じるときに強力な道具となるが，その際高さの考察は重要な位置を占める．また，いわゆるボゴモロフ予想に代表されるように，高さを通じて代数多様体の代数的点の分布を考察し，更には代数多様体の幾何的性質と関連付けて理解することは，非常に興味深い問題となっている．

高さは，アラケロフ幾何においては算術的交叉数として現れる．その交叉数は，局所的な交叉数の和として表されるが，アラケロフ幾何においてはアルキメデス的素点の寄与というものが生じる．このアルキメデス的素点の寄与は，そこで計量を考えることによって与えられる．「(アルキメデス的) 素点で計

量を導入する」というのがアラケロフ幾何の本質にある．

では，この「アラケロフ幾何的視点」を，非アルキメデス的素点の上に持ち込むにはどうしたらよいか？研究開始当初において，非アルキメデス的幾何やトロピカル幾何を利用して，アラケロフ幾何がアルキメデス的素点の上で行っていた計量を用いた議論を非アルキメデス的素点の上でも展開し，算術的問題に応用しよう，という流れがあった．本研究は，このことを背景として始まった．

本研究においては，具体的研究対象としては大きく分けて二つの話題を扱った．ここで，それぞれの話題における研究開始当初の背景について述べておく．一つはグロス‐シェン輪体の高さの話題，もう一つはボゴモロフ予想に関する話題である．

（１）グロスとシェンは，大域体上の代数曲線の三重積の上に，グロス‐シェン輪体と呼ばれるホモロジー的に自明な一次元輪体を構成した．このホモロジー的自明な輪体の有理的非自明性を問うのは興味深い問題である．その答えを得るために，彼らはグロス‐シェン輪体の高さを定義した．さらに彼らは，その有理的非自明性は高さが０でないことから従うことを示した．

グロス‐シェン輪体の高さを計算するために，張はその高さの非アルキメデス的素点における寄与を計量グラフにおける調和解析を用いて記述した．それにより，非アルキメデス的素点による寄与は，ある種のグラフ不変量の計算によって得られることが明らかとなった．

（２）大域体上定義されたアーベル多様体に対して，ボゴモロフ予想と呼ばれる重要な主張がある．それは「アーベル多様体において高さの小さい代数的点を稠密に持つような閉部分多様体は，非常に限定的なものになってしまう」という型の主張である．代数体上においては，その上のボゴモロフ予想（算術的ボゴモロフ予想）は既に定理として確立されている（ウルモ‐張の定理）．この場合においては，この「非常に限定的なもの」とは「捩れ部分多様体」ということである．

ウルモと張による算術的ボゴモロフ予想の解決においては，アルキメデス的素点の上に自然に現れる複素数体上のアーベル多様体を考え，高さが小さい点に対するそこでの標準測度についての同程度分布の定理が重要な役割を果たした．ボゴモロフ予想を関数体上で考えたもの（幾何的ボゴモロフ予想）を同じアイデアで解決するには，彼らの議論を非アルキメデス的素点で考える必要がある．グブラーは，関数体上のアーベル多様体が総退化するような素点を持つ場合に，対応するトロピカル多様体をその素点で考えることにより，ウルモ‐張の方法を非アルキメデス的状況に適合させ，総退化な素点が存在する場合に幾何的ボゴモロフ予想を解決した．この総退化の場合には，その素点における多様体のトロピカル化が等次元の単体複体の構造を持ち，さらに標準測度のトロピカル化が，その上のルベーグ測度となるという結果が重要となった．

しかし，一般の場合には素点におけるトロピカル多様体もその上の標準測度もこのようなきれいなものにはならず，実際複雑な様相を呈する．それが主因となって，幾何的ボゴモロフ予想については，その正確な定式化も含めて未知のままであった．

２．研究の目的

目的を二つの話題に分けて述べる．

（１）本研究の目的の一つは，非アルキメデス的素点における高さの局所情報を計算することによって，グロス‐シェン輪体の高さの評価を行い，それを用いて代数曲線の「複雑さ」との関連を詳らかにすることである．

（２）本研究のもう一つの目的は，幾何的ボゴモロフ予想を定式化し，解決に向けて研究を発展させることである．特に，ウルモ‐張‐グブラーの方法を非アルキメデス的設定において可能な限り発展させ解決を目指すと同時に，この予想の関数体特有の困難を詳らかにすることである．

３．研究の方法

（１）張の結果を用いれば，グロス‐シェン輪体の高さの計算はその局所的寄与の総和として得られる．本研究では特に非アルキメデス的素点における寄与が問題となる．その計算方法として重要な位置を占めるのが，有限グラフまたはそれに付随する計量グラフに対して定まる各種不変量の計算とその評価である．実際，この計算において，これまでに本研究代表者が得た不変量の計算技術を駆使して，必要な評価を得た．

（２）幾何的ボゴモロフ予想を解決するための基本的なアイデアは，非アルキメデス素点において同程度分布の定理を適用することである．そこで必要となる道具は，非アルキメデス幾何的対象（非アルキメデス的解析空間はトロピカル多様体）の上の標準測度である．非アルキメデス的素点における標準測度については，２０１０年にグブラーがその構造についてある程度の結果を得た．しかしながら，その結果は幾何的ボゴモロフ予想を得るには十分なものではなかった．

そこで，本研究においては，標準測度の構造のさらなる詳細な研究が重要な方法となる．さらにその研究には，ベルコビッチ解析空間における骨格の研究が重要な手法となる．標準測度についての多くの情報はそこに隠れているからである．

４．研究成果

（１）本研究課題期間において，グロス‐シェン輪体の高さについて次の結果を得て学術雑誌を通して公開した（下記雑誌論文②)：「関数体上定義された非超楕円的な曲線のグロス‐シェン輪体の高さは，その曲線の還元グラフが全て『例外的』なものでない限り，正となる.」

本研究において研究代表者は非アルキメデス的素点の寄与について研究した．一方で，ドゥヨングによるアルキメデス的寄与の計算がある．これをあわせると，本成果によって関数体のみならず代数体上定義されたグロス‐シェン輪体の高さの計算にも貢献したことになる．アルキメデス的素点における解析は古くからその手法は知られているが，本成果によって非アルキメデス的素点での計算も実行されたことにより，大域化された結果が得られたことに大きな意義がある.

（２）前項「研究の方法」でも述べたように，幾何的ボゴモロフ予想の研究においては非アルキメデス的素点における標準測度の詳細な構造を知る必要がある．その前提として，（総退化な素点を持たない）一般の状況下での幾何的ボゴモロフ予想を解決するに当たって，標準測度についてどのような情報が足りていないのかを理解する必要がある．このことを詳細に調べ，成果として二つの論文（一つは未出版）を書いた．それについて述べる.

①ウルモ‐張の方法を思い起こすと，標準測度がある一点におけるディラク型の測度を成分にもつと，それが邪魔をして議論が上手く回らないことに気づく．従って，そのような状況が起こらない，つまり標準測度が一点のディラク型測度を成分と持たないための十分条件を知るということは重要となる．それについて一つの解答を与えたのが，下記雑誌論文の①である．実際この論文においてその十分条件は「総退化」よりも真に弱い条件であり，その条件下で幾何的ボゴモロフ予想を解決した．また同時に，あいまいのままであった一般的状況下における幾何的ボゴモロフ予想の定式化もこの論文で与えた．つまり，「非常に限定的な」部分多様体の中身を明らかにした.

この成果は，幾何的ボゴモロフ予想が総退化な素点を持つとは限らない場合への一般化への第一歩を与えた．また，一般の標準測度が算術的問題に有効利用できる重要な例でもある．更に述べると，この成果において標準測度の構造がどのようなことに影響されて決まるのかが明らかにされた．非アルキメデス幾何の算術への応用における重要な結果と位置づけられる.

②最近の研究（２０１２年度）においては，上記①の研究をさらに一般化した．それについて述べる．A を関数体上のアーベル多様体として，A の部分アーベル多様体 B で至る所潜在的良い還元を持つもののうち，極大なものを一つとる．すると，あるアーベル多様体 C で，至る所潜在的良い還元を持つ非自明な部分アーベル多様体を持たないものが存在して，A は B×C と同種となる．この研究において，A に対し幾何的ボゴモロフ予想が成立することと B についてそれが成立することが同値であることを証明した．従ってその系として，C が楕円曲線となるような場合には幾何的ボゴモロフ予想が示せた.

この結果は，下記の論文①の一般化である．それのみならず，ウルモ‐張‐グブラーの方法が通用するような限界の結果を与えている．実際，至る所潜在的に良い還元を持つアーベル多様体において，その部分多様体の標準測度を考えると，それは必ず一点のディラク測度となってしまい，何の有効な情報も得られない．従って，一般状況下での幾何的ボゴモロフ予想をそのような B に還元できてしまった以上，これまでの方法は無力であり，新しい方法を模索する必要があることを明らかにしたわけである.

その意味において幾何的ボゴモロフ予想は一定の段階まで到達した．完全解決に向けては，至る所良い還元を持つアーベル多様体に対して適用できる全く別の手法をあみ出すことが大事であり，これについては今後の研究課題である.

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計２件）

① <u>Kazuhiko Yamaki</u>, Geometric Bogomolov conjecture for abelian varieties and some results for those with some degeneration (with an appendix by Walter Gubler: the minimal dimension of a canonical measure), manuscripta mathematica (2012 online), DOI: 10.1007/s00229-012-0599-1, Print ISSN 0025-2611

② <u>Kazuhiko Yamaki</u>, Graph invariants and the positivity of the height of the Gross-Schoen cycle for some curves. Manuscripta mathematica. 131 巻 (2010) 149-177. 査読あり

〔学会発表〕（計３件）

①発表者：<u>山木壱彦</u>，発表題目：Strict supports of canonical measures and

applications to the geometric Bogomolov conjecture, 学会名: Paris-Barcelona-Kyoto seminar in Arakelov geometry, 発表年月日: 2012/09/21, 場所：京都大学.

②発表者：山木壱彦, 発表題目：Geometric Bogomolov conjecture for abelian varieties and some results for those with some degeneration, 学会名: Paris-Barcelona-Kyoto seminar in Arakelov geometry, 発表年月日: 2010/09/21, 場所：京都大学.

③(発表者)山木壱彦, (発表題目) Recent development on the geometric Bogomolov conjecture, (学会名)Torsion of Abelian Schemes and Rational Points on Moduli Spaces, (発表年月日) 2010/01/25, (場所)ボルドー第一大学 (フランス).

〔その他〕
ホームページ等
http://kyouindb.iimc.kyoto-u.ac.jp/j/jO6oW

６．研究組織
(1)研究代表者
山木　壱彦　(YAMAKI KAZUHIKO)
京都大学・高等教育研究開発推進機構・准教授
研究者番号：80402973

(2)研究分担者
(　　)

研究者番号：

(3)連携研究者
(　　)

研究者番号：