

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成25年 5月7日現在

機関番号：15401

研究種目：若手研究（B）

研究期間：2009～2012

課題番号：21740015

研究課題名（和文） 高次元類体論から見た数論幾何学

研究課題名（英文） Arithmetic geometry through higher dimensional class field theory

研究代表者

平之内 俊郎 (HIRANOUCHI TOSHIRO)

広島大学・大学院理学研究科・助教

研究者番号：30532551

研究成果の概要（和文）：主に以下の成果が得られた。

- (1) 混標数で十分たくさん1の冪根を含むような完備離散付値体に対する Milnor K 群の構造の計算
- (2)  $p$  進体上の楕円曲線の積に対するサイクル写像の像及び Chow 群の構造の計算
- (3) 可換代数群に付随する Milnor 型 K 群の構成と応用

研究成果の概要（英文）：We have obtained the following results:

1. The structure of the Milnor K-group of a mixed characteristic complete discrete valuation field
2. Calculation of the image of the cycle map and the Chow group of the product of elliptic curves over  $p$ -adic field
3. Definition of the Milnor type K-group attached to commutative algebraic groups and its applications

交付決定額

(金額単位:円)

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	900,000	270,000	1,170,000
2010年度	800,000	240,000	1,040,000
2011年度	800,000	240,000	1,040,000
2012年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
総計	3,300,000	990,000	4,290,000

研究分野:数論幾何学

科研費の分科・細目:数学・代数学

キーワード:高次元類体論・代数的 K 理論

1. 研究開始当初の背景

(1) 高次元局所体に対する Milnor K 群の構造を知ることは、高次元局所類体論により対応する Abel 拡大体について知ることになる。より一般に完備離散付値体や Hensel 付値体の場合に高次元単数群から Milnor K 群に誘導される filtration の構造、とくにその次数商を考察した。

これに関しては Bloch-加藤・栗原・中村等の先行研究があるが、混標数で特に体が絶対分岐している場合が未解決であった。こうした 1 の冪根を十分たくさん含む場合は、これらの filtration の構造が比較的分かり易くなるだろう、とすることは予想されていたようだ。

(2) multiplicative reduction や good ordinary

reduction を持つ  $p$  進体上の楕円曲線の積に対するサイクル写像の像については山崎・竹本・Raskind-Spiess 等の先行研究があった。しかしながら超特異還元を持つ場合は未解決であった。このサイクル写像の像の計算から数論幾何的に重要な群のひとつである Chow 群の構造を楕円曲線の積の場合に決定することができるようになる。こうした観点からサイクル写像の像の計算は数論幾何学的に非常に重要な問題であると言える。

(3) 体の Milnor  $K$  群の自然な拡張として半 Abel 多様体に対する Milnor 型  $K$  群があり、高次 Chow 群との関係が知られていたが、unipotent part を含む可換代数群に対しては何も知られていなかった。

(4) 適当なスキーム  $X$  の regular closed immersion  $Z \rightarrow X$  に対して (Quillen)  $K$  理論の射  $K(X) \rightarrow K(X-Z)$  の homotopy fiber は或る完全圏の  $K$  理論で記述できるであろう、という Gersten の予想 (1974) がある。いくつかの特別な場合についてはこの予想は解決されていたが、完全に解決されてはいなかった。

(5)  $p$  進体上の曲線の類体論は、不分岐の場合つまりコンパクトな曲線に対しては Chow 群でもってその曲線の基本群の Abel 化が近似されることが斎藤秀司氏により証明されていた。しかし分岐を許した場合は、Chow 群に変わる群として何を持ってくれば良いかも分かっていなかった。

## 2. 研究の目的

上にあげた研究結果にはどれも分岐理論が関わってきている。本研究の目的のひとつは、分岐を許した高次元類体論を完成されるというものである。しかし高次元類体論には代数的  $K$  理論や混合モティーフの理論といった数論幾何の種々の道具が必要である。こうした高次元類体論への応用を鑑みながら道具を揃えていく。

## 3. 研究の方法

(1) 平山聖司氏と高次元単数群の filtration の次数商の計算の方法とそれらの一般化について議論・共同研究を行った。

(2) 望月哲史氏と主に Gersten 予想や負の  $K$  群の新しい定義についての共同研究を行った。これはある種の Waldhausen 圏の弱同値から「擬弱同値」を定義して Gillet-Waldhausen 型の定理が新たに得られた。これにより完全圏の導来圏を「高次化」した三角圏が得られ、この「高次導来圏」の Grothendieck 群でもって負の  $K$  群を記述することができた。

(3) 田口雄一郎氏と truncated discrete valuation ring の分岐理論及びこのような環上の Groebner 基底について共同研究を行った。また完備離散付値環とその truncation の拡大の成す圏がそれぞれ分岐を制限すれば圏同値になるという Deligne の定理

(1984) を剰余体が完全で無い場合への一般化についても研究した。

(4) 平成 22 年と 24 年にドイツ Duisburg-Essen 大学に長期滞在し主に相対的 Chow 群や一般 Albanese 多様体、加法的 Chow 群について研究した。当地には高次元類体論で有名な M. Kerz 氏や加法的サイクル理論の創始者の一人である H. Esnault 氏及びその学生たちがいて、彼らとの議論・共同研究を行った。

## 4. 研究成果

(1) 混標数で 1 の  $p^n$  乗根 ( $p$  は素数) を含むような完備離散付値体に対して Milnor  $K$  群から誘導される自然なフィルトレーションの次数商の構造を決定することが出来た。

(2) 形式群に誘導されるフィルトレーションの構造を決定することで、超特異還元を含む  $p$  進体上の楕円曲線の積に対してサイクル写像の像を計算した。とくに或る場合にはサイクル写像の核が自明になり Chow 群の構造を具体的に決定することが出来た。これには川内氏の形式群に付随する Kummer 写像の像に関する結果を一般化して得られたもので、これ自体、楕円曲線の Selmer 群の計算といった別の応用が見込まれている。

(3) 代数群に付随する Milnor 型  $K$  群 (= 染川  $K$  群の拡張) を対象に研究を行った。もともと染川  $K$  群とは半 Abel 多様体に付随する群で、古典的な Milnor  $K$  群の拡張であり、また Milnor  $K$  群のもつ関手性などをもっていた。ここでは、完全体上で residue map の定義を見直すことによって、unipotent part を含むような一般的な可換代数群に対して Milnor 型  $K$  群を定義することができた。更に特別な代数群をとったときの Kaehler 微分加群や Milnor  $K$  群、及び加法的 Chow 群との関係を調べることができ、高次 Chow 群や Milnor  $K$  群に対して知られていた幾つかの定理の興味深い加法的類似が得られた。

(4) 有限体上の場合に Ivorra-Ruelling 等の代数群に付随する Milnor 型  $K$  群 (reciprocity functor としてのテンソル積) が消えることが示された。またこの群よりも少し大きい Mackey 関手としての積は一般には非自明だが有限であることが分かった。

(5) 望月哲史氏との共同研究により、局所化列に関する Gersten 予想を負の代数的  $K$  群や加法的  $K$  理論にまで拡張した上で解決することが出来た。またこの結果を用いて負の  $K$  群の消滅性に関する Weibel 予想へのある種の応用を考察した。

(6) 田口雄一郎氏との共同研究により、truncated discrete valuation ring 上の Groebner 基底の一般論を準備した後、truncated discrete valuation ring 上の加群の平坦性に関する分かり易い判定条件を得ることが出来た。

(7)  $p$  進体上の開曲線に対して分岐を許した類体論を証明した。もう少し詳しく述べると、Chow 群を一般化した「イデール類群」を開曲線に対して定義して、基本群の Abel 化への相互写像を作り、その像と核を決定した。これは前述の斎藤秀司氏の不分岐類体論の一般化になっている。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 7 件)

1. T. Hiranouchi and S. Hirayama, On the cycle map for products of elliptic curves over a  $p$ -adic field, *Acta Arith.* 157 (2013), 101–118. doi:10.4064/aa157-2-1 査読有
2. T. Hiranouchi, Milnor  $K$ -group of a complete discrete valuation field, *Proc. Japan Acad., Ser. A.* 88 (2012), no. 4, 59–61. doi:10.3792/pjaa.88.59 査読有
3. T. Hiranouchi, Ramification theory of truncated discrete valuation rings: a survey, “Algebraic Number Theory and Related Topics 2008” -- a volume in RIMS-Bessatsu Series --, 2010, 35–43. DOI 10.4036/iis.2010.33 査読有
4. T. Hiranouchi and Y. Taguchi, Flat modules and Groebner bases over truncated discrete valuation rings, *Interdisciplinary of Information Sciences (IIS)*, *Proceedings of Japan-Korea Joint Seminar on Number Theory and Related Topics 2008*, 16 (2010), no. 1, 33–37. doi:10.4036/iis.2010.33 査読有
5. T. Hiranouchi, Class field theory for open curves over  $p$ -adic fields, *Math. Z.*, 266 (2010), no. 1, 107–113. DOI 10.1007/s00209-009-0556-1 査読有
6. T. Hiranouchi and S. Mochizuki, Pure weight perfect Modules on divisorial schemes, in “Deformation Spaces”, Edited by: Hossein Abbaspour, Universit e de Nantes, France, Matilde Marcolli, California Institute of Technology, Pasadena, CA, and Thomas Tradler, New York City College of Technology (CUNY), NY A publication of Vieweg Verlag. (2010) doi:10.1007/978-3-8348-9680-3\_3 査読有
7. S. Harada and T. Hiranouchi, Smallness of fundamental groups for arithmetic schemes, *J. Number Theory* 129 (2009), no. 11, 2702–2712. DOI:10.1007/978-3-8348-9680-3\_3 査読有

[学会発表] (計 21 件)

1. 平之内俊郎, A tensor product in the category of reciprocity functors, KANT2013, 九州大学, 2013 年 2 月 11 日
2. 平之内俊郎, 代数群に付随する Milnor 型  $K$

群と加法的 Chow 群, 代数的整数論とその周辺, 京都大学数理解析研究所, 2012 年 12 月 6 日

3. 平之内俊郎, Bloch-加藤予想の楕円曲線類似について, 大阪大学整数論&保型形式セミナー, 大阪大学, 2012 年 11 月 30 日
4. 平之内俊郎, Kahler 微分と染川  $K$  群, KANT2012, 九州大学, 2012 年 2 月 23 日
5. 平之内俊郎, Milnor  $K$ -group of a complete discrete valuation field, 日本数学会中四国例会, 岡山大学, 2012 年 1 月 22 日
6. 平之内俊郎, non-connected  $K$ -theory revisited, algebra seminar, KIAS, Korea, 2011 年 9 月 8 日.
7. 平之内俊郎,  $\infty$ -categories for the working mathematician, algebra seminar, KIAS, Korea, 2011 年 9 月 7 日.
8. 平之内俊郎,  $\infty$  圏の圏のモデルについて, SGAD2011, 京都大学, 2011 年 4 月 12 日
9. 平之内俊郎,  $\infty$ -categories for the working mathematician, SGAD2011, 京都大学, 2011 年 4 月 12 日.
10. 平之内俊郎, presentable( $\infty$ ) 圏と  $\infty$  トポス, SGAD2011, 京都大学, 2011 年 4 月 12 日
11. 平之内俊郎, On a filtration of Milnor  $K$ -groups modulo  $\hat{p}^n$  for a henselian discrete valuation field, KANT2011, 九州大学, 2011 年 2 月 18 日.
12. 平之内俊郎, On the image of the cycle map for the product of elliptic curves over a  $p$ -adic field, *Industrious number theory 3*, Korea Institute for Advanced Study, Korea, 2010 年 11 月 12 日
13. 平之内俊郎, On the image of the cycle map for the product of elliptic curves over a  $p$ -adic field, Oberseminar, Essen-Duisburg 大学, Germany, 2010 年 10 月 14 日
14. 平之内俊郎, On a filtration associated with an isogeny on formal groups, 第 9 回仙台広島整数論集会, 東北大学, 2010 年 7 月 20 日.
15. 平之内俊郎, 非連結  $K$  群について, 九州代数的整数論 2010, 九州大学, 2010 年 3 月.
16. 平之内俊郎, Quasi-weak equivalences in complicial exact categories, 九州大学代数学セミナー, 九州大学, 2010 年 2 月 19 日.
17. 平之内俊郎, Quasi-weak equivalences in complicial exact categories, Sakura Workshop “Torsion of abelian schemes and rational points on moduli spaces”, IMB, France, 2010 年 1 月 29 日.
18. 平之内俊郎, Pure weight perfect Modules on divisorial schemes, 第 8 回広島整数論集会, 広島大学, 2009 年 7 月 24 日.
19. 平之内俊郎, 最近の高次元類体論について, 京都大学数理解析研究所談話会, 京都大学数理解析研究所, 2009 年 6 月 17 日.
20. 平之内俊郎, 最近の高次元類体論について

て、広島大学理学研究科数学教室談話会、広島大学、2009年12月1日。

21. 平之内俊郎, Smallness of fundamental groups for varieties over finite fields  
t-motives: Hodge structures, transcendence and other motivic aspects, BIRS, Canada, 2009年10月1日。

## 6. 研究組織

### (1)研究代表者

平之内 俊郎 (HIRANOUCHI TOSHIRO)

広島大学・大学院理学研究科・助教

研究者番号:30532551

### (2)研究分担者

なし

### (3)連携研究者

なし