

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 24 年 5 月 16 日現在

機関番号：16301

研究種目：若手研究（B）

研究期間：2009～2011

課題番号：21740019

研究課題名（和文）種々の多変数多重ゼータ関数とゼータ正規化積の研究

研究課題名（英文）A study on multiple zeta function and zeta regularized products

研究代表者

山崎 義徳（YAMASAKI YOSHINORI）

愛媛大学・理工学研究科・講師

研究者番号：00533035

研究成果の概要（和文）：

ゼータ正規化積の一般化である“深さ r のゼータ正規化積”を導入し、その代数的・解析的性質の研究を行った。特に、多様体上のラプラシアン“深さ r の行列式”について、特別な場合にその明示的な表示を得た。一方で、現在研究されている多重ゼータ関数を広く含む“Schur 多重ゼータ関数”を導入し、その基本的な性質について調べた。また、具体的に数値計算を行うことで、このゼータ関数が満たす組合せ論的な性質についても研究した。

研究成果の概要（英文）：

We introduced “higher depth zeta regularized products” as generalizations of the usual regularized products and have studied their analytic and algebraic properties. In particular, we have obtained explicit expressions of “higher depth determinants” of the Laplacian on some manifolds. Moreover, we also introduced “Schur multiple zeta functions” as extensions of the Euler-Zagier multiple zeta functions. Several fundamental properties and combinatorial formulas for the zeta functions have been obtained or expected.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2009 年度	800,000	240,000	1,040,000
2010 年度	800,000	240,000	1,040,000
2011 年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
年度			
総計	2,400,000	720,000	3,120,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：ゼータ関数、ゼータ正規化積、ラプラシアンの行列式

1. 研究開始当初の背景

ゼータ正規化積の研究は、「ガンマ関数が Hurwitz ゼータ関数の 0 での微分で書ける」という所謂“Lerch の公式”に端を発する。この流れを汲み、ガンマ関数の一般化としてのゼータ正規化積の研究が今日でも盛んである。特に、この視点から導入された Barnes

の多重ガンマ関数は、現在では数論に限らず理論物理など様々な分野に現れるまでに至る。また、幾何学的にもゼータ正規化積の果たす役割は大きい。実際、多様体上のラプラシアンの特異値からゼータ正規化積を通して定義されるラプラシアンの行列式は様々な幾何学的不変量を含むことが知られ

ており、かつ物理における超弦理論との関連からもその重要性は極めて高い。

一方で、今日のゼータ関数論においては様々な多変数多重ゼータ関数の研究が盛んである。それは、Euler による Riemann ゼータ関数の特殊値の研究を踏まえた代数的研究（値の超越性やそれらの間の関係式の研究）に始まり、現在ではそれらに関数論的立場から理解しようという解析的研究も進展している。

ここで自然に生じるのが、“多変数多重ゼータ関数に付随するゼータ正規化積とは何か”という問である。多変数の場合、それはまだ未定義である。しかし、Kamano による Euler-Zagier 型多重 Hurwitz ゼータ関数に対する“多重 Lerch の公式”の導出など、それに近い問題意識を持った研究も現れ始めた。そこで、本研究ではこの問に対する数学的定式化を行いたい。そのためには、まずはより具体的なゼータ関数で議論を行う必要がある。一般論はそれらの具体的な例を基に構築されることが期待される。

2. 研究の目的

以上を踏まえ、本研究では以下の二つを主たる研究目的として定めた。

(1) “深さ r のゼータ正規化積”の研究：

ゼータ正規化積の定義では、対応するゼータ関数の 0 での微分のみを考えたが、ここではもっと一般に、自然数 r に対して $1-r$ での微分で定義されるものを“深さ r のゼータ正規化積”として定め、それが持つ数論的・幾何学的性質について研究する。特に、負定曲率のコンパクトリーマン面および高次元球面に対してラプラシアンの上記意味での“深さ r の行列式”を研究する。

(2) 多変数多重ゼータ関数の解析的研究：

“多変数多重ゼータ関数に付随するゼータ正規化積”の研究を行うにあたり、多重ゼータ関数自身の解析的性質を詳細に調べておくことは必要不可欠である。そこで本研究では、“Schur 多重ゼータ関数”について研究する。これは、今日の多重ゼータ関数論で主たる研究対象となっている“等号付き”および“等号無し” Euler-Zagier 型多重ゼータ関数の両者を含む、組合せ論的に構成された新しい多変数多重ゼータ関数である（分割が横一列のときが“等号付き”の、縦一列のときが“等号無し”の多重ゼータ関数に対応する）。この多重ゼータ関数に対して、解析接続などの解析的研究や、特殊値間の関係式などの代数的研究を行う。また、Schur 関数が満たす組合せ論的な性質がどれ程受け

継いでいるかについても研究する。

3. 研究の方法

(1) “深さ r のゼータ正規化積”の研究：

まず負定曲率のコンパクトリーマン面に対する“深さ r の行列式”だが、それは Barnes の多重ガンマ関数および“Milnor-Selberg ゼータ関数”と呼ぶべき新しい関数（Selberg ゼータ関数の一般化）で書けることが分かっている。後者については未知の部分も多いので、本研究では、この関数の解析的性質を明らかにすることを目標とする。そのために、“深さ r のゼータ正規化積”の一般論を整備することから始め、得られた理論と複素関数論、特に多価関数の理論（Milnor-Selberg ゼータ関数は一般には多価関数になる）を用いてこの関数の解析的性質を調べる。

また高次元球面に対する“深さ r の行列式”については、計算機を用いた明示的な表示（Barnes の多重ガンマ関数の積商で書ける）が得られているので、それに数学的な証明を付けることを目標とする。計算機で得られた表示は簡明ではあるものの、実際の計算過程は非常に複雑である。そこで、各過程をさらに細分化し、必要ならば再度計算機を用いることでそれらに順次証明を付けていく。困難な場合は、まずは r が小さい場合を考え、それを基に議論を一般化する。

(2) 多変数多重ゼータ関数の解析的研究：

現在までに得られている“等号付き”および“等号無し” Euler-Zagier 型多重ゼータ関数の性質を Schur 多重ゼータ関数の言葉で書き直し、さらにそれらに組合せ論的な解釈を与えることを目標とする。Schur 多重ゼータ関数は自然数の分割に対して定義される関数である。そこでまずは、分割の重さが小さいときや、分割に対応するヤング図形が単純な場合（例えば長方形やフックの場合など）に議論を行い、計算機を適宜用いて予想を立てながら上記の実現を目指す。

4. 研究成果

(1) “深さ r のゼータ正規化積”の研究：

まず負定曲率のコンパクトリーマン面の場合だが、対数関数の枝をうまく選ぶことで、先述の Milnor-Selberg ゼータ関数が通常の Selberg ゼータ関数の場合と同様に（然るべきスリットを入れた領域へ）解析接続され、関数等式を満たし、さらにはオイラー積表示を持つことを証明した。以上の結果は東京工業大学の黒川信重氏と九州大学の若山正人氏との共同研究で得られたものであり、論文に

まとめて現在投稿中である。

次に高次元球面の場合だが、母関数をうまく設定することで、先述の表示の数学的な証明を得ることに成功した。さらに、副産物として、この表示をより対称性の高い表示に書き直すことができた。得られた表示は、今後更なる一般化を研究するにあたって非常に有効であることが期待される。以上の結果も論文にまとめて現在投稿中である。

さらに、同様の議論を数論的ゼータ関数にも適用することができた。具体的には、 GL_d の保型カスプ表現に付随する L 関数の零点に関する“深さ r のゼータ正規化積”が、Milnor ガンマ関数と“poly L 関数”と呼ぶべき L 関数の一般化 (Milnor-Selberg ゼータ関数の対応物) で書けることを示した。これは Deninger による Riemann ゼータ関数の場合の結果の拡張になっている。また、この poly L 関数については、反復積分表示を与え、それが然るべき領域への解析接続を与えることも確かめた。以上の結果は九州大学の若山正人氏との共同研究で得られたものであり、論文は既に出版済である。

(2) 多変数多重ゼータ関数の解析的研究：

先述の Schur 多重ゼータ関数について、まずは収束性などの基本的な性質を調べた。また、分割が小さい全ての場合に特殊値を具体的に計算し、それらの間の関係についていくつかの予想を立てることができた。特に、Schur 関数の場合と類似した組合せ論的な性質 (例えば Littlewood-Richardson 規則や Jacobi-Trudi 公式など) を満たすであろうことも確認できたが、現在のところまだ証明には至っていない。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 4 件)

- ① Masato Wakayama, Yoshinori Yamasaki, Higher regularizations for zeros of cuspidal automorphic L -functions of GL_d , Journal de théorie des nombres de Bordeaux, 23 (2011), 751-767. (査読有)
- ② Yoshinori Yamasaki, Arithmetical properties of multiple Ramanujan sums, The Ramanujan Journal, 21 (2010), 241-261. (査読有)
- ③ Yoshinori Yamasaki, Evaluations of multiple Dirichlet L -values via symmetric functions, Journal of Number Theory, 129 (2009), 2369-2386. (査読

有)

- ④ Kazufumi Kimoto, Yoshinori Yamasaki, A variation of multiple L -values arising from the spectral zeta function of the non-commutative harmonic oscillator, Proceedings of the American Mathematical Society, 137 (2009), 2503-2515. (査読有)

[学会発表] (計 15 件)

- ① 山崎 義徳, 若山 正人, カスプ表現に付随する L -関数の零点に関する Milnor 型ゼータ正規化積について, 2012 年度日本数学会年会, 東京理科大学, 2012 年 3 月 29 日.
- ② 山崎 義徳, A study of the spectral zeta functions for discrete tori via the hypergeometric functions, Zeta and Limit Laws in OKINAWA 2011, カルチャーリゾートフェストーネ, 2011 年 11 月 26 日.
- ③ 山崎 義徳, 離散トーラスに付随するゼータ関数について, 表現論がつなぐ数学の展望, ホテルサンルート名古屋駅前店, 2011 年 8 月 30 日.
- ④ 山崎 義徳, Milnor 型ゼータ正規化積について, 第 56 回代数学シンポジウム, 岡山大学, 2011 年 8 月 11 日.
- ⑤ 山崎 義徳, On Schur multiple zeta values, Zeta and Limit Laws in OKINAWA 2010, カルチャーリゾートフェストーネ, 2010 年 11 月 6 日.
- ⑥ Yoshinori Yamasaki, Factorization formulas for higher depth determinants of the Laplacian on the n -sphere, POSTECH Number theory and arithmetic geometry seminar, 浦項工科大学, 2010 年 10 月 25 日.
- ⑦ 山崎 義徳, 非可換調和振動子のスペクトルゼータ関数とそれに付随する交代的多重ゼータ値について, 多重ゼータ値の諸相, 京都大学数理解析研究所, 2010 年 9 月 6 日.
- ⑧ 山崎 義徳, Schur 多重ゼータ値について, 表現論がつなぐ数論・解析学・組合せ論, 愛媛大学, 2010 年 8 月 24 日.
- ⑨ 山崎 義徳, 若山 正人, Hecke L -関数の零点と higher depth regularized product, 2010 年度日本数学会年会, 慶應義塾大学, 2010 年 3 月 26 日.
- ⑩ 山崎 義徳, 対称関数と多重ゼータ値, 第 3 回ゼータ値・ゼータ関数ミニセミナー, 九州大学, 2010 年 3 月 5 日.

- ⑪ 山崎 義徳, Hecke's zeros and higher depth determinants, Zeta and Limit Laws in OKINAWA 2009, カルチャーリゾートフェストーネ, 2009年11月15日.
- ⑫ Yoshinori Yamasaki, Zeta regularized products and higher depth determinants of Laplacians, Geometric and Harmonic Analysis on Homogeneous Spaces, Le Grand Hotel of Kerkennah, Kerkennah Islands, Sfax, 2009年11月5日.
- ⑬ 山崎 義徳, Higher depth regularized products and zeta functions of Milnor type, 解析数論およびその周辺の諸問題, 京都大学, 2009年10月16日.
- ⑭ 山崎 義徳, Higher depth determinants of the Laplacian on the n -sphere, 2009年度日本数学会秋季総合分科会, 大阪大学, 2009年09月24日.
- ⑮ 山崎 義徳, Higher depth determinants of the Laplacian on the n -sphere, 表現論がつなぐ数学, ホテルロコアナハ, 2009年9月15日.

[その他] プレプリント (計 2 件)

- ① Nobushige Kurokawa, Masato Wakayama Yoshinori Yamasaki, Milnor-Selberg zeta functions and zeta regularizations, submitted, 2012.
MathArXiv : 1011.3093
- ② Yoshinori Yamasaki, Factorization formulas for higher depth determinants of the Laplacian on the n -sphere, submitted, 2012.
MathArXiv : 1011.3095.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

山崎 義徳 (YAMASAKI YOSHINORI)
愛媛大学・理工学研究科・講師
研究者番号 : 00533035

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

なし