様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成２４年　６月　１日現在

機関番号：16301
研究種目：若手研究（Ｂ）
研究期間：２００９～２０１１
課題番号：２１７４００２０
研究課題名（和文）　次数２のジーゲル保型形式に対するフーリエ・ヤコビ型球関数とその応用

研究課題名（英文）　Study of Fourier-Jacobi type spherical functions for Siegel modular forms of degree two and its application

研究代表者
平野　幹（Hirano Miki）
愛媛大学・理工学研究科・教授
研究者番号：８０３１４９４６

研究成果の概要（和文）：

本研究課題に対する予備研究・類似研究において、十分に満足いく成果をあげることができた。主な成果は、GL(3,C)のクラス１でない主系列表現に対するホイッタカー関数の新しい明示公式と関連するゼータ積分の明示的評価である。これらは保型形式およびＬ関数の明示的理論において重要な結果であると思われ、今後の発展が期待される。

研究成果の概要（英文）：

We reaped a satisfactory result in a preliminary and a similar study to the main theme. The principal results are a new explicit formula of the non-calss 1 principal series Whittaker functions on GL(3,C) and its application to the associated zeta integrals. These are important for the explicit theory of automorphic forms and their L-functions.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００９年度	1,200,000	360,000	1,560,000
２０１０年度	1,100,000	330,000	1,430,000
２０１１年度	1,100,000	330,000	1,430,000
年度			
年度			
総　計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・代数学
キーワード：フーリエ・ヤコビ型球関数、フーリエ・ヤコビ展開、保型 L-関数、ジーゲル保型形式、ホイッタカー関数

１．研究開始当初の背景

保型形式、保型表現は整数論における重要な研究対象のひとつである。とりわけ正則保型形式は古典的に詳しく研究されている。そ

の一方で、実解析的であるが正則でない保型形式については、例えば不連続群の L2−コホモロジー群に関する松島−村上理論で自然に現れるなどその重要性の認識はあるものの研究の未発達さについては認めざるを得ない。

非正則保型形式に対する研究の進展が遅々としている原因の一つとして、関連する特殊関数の解析的性質、明示的フーリエ展開などの整数論的研究に必要不可欠である基礎的研究があまり行われていないことが挙げられる。

このような観点から、多変数非正則保型形式の研究に対する基礎として、関連した特殊関数やフーリエ展開などの明示的研究は重要かつ急務であるといえる。

２．研究の目的

次数２の実シンプレクティック群 Sp(2,R)上のフーリエ･ヤコビ型球関数と保型形式および L-関数への応用について研究を行う。これまでに、いくつかの主要な系列に属する既約表現に対してフーリエ・ヤコビ型球関数を具体的に決定し、メイジャーの G-関数による表示を得ているが、本研究ではジーゲル極大放物部分群から誘導された主系列に属する表現に対してこの球関数の決定を試み、その成果をもとに、実解析的ジーゲル保型形式に対するフーリエ・ヤコビ展開を考察し、実解析的ヤコビ形式との関係について研究する。また、フーリエ・ヤコビ型球関数に類似の一般球関数についても研究を行い、ゼータ積分による保型 L-関数への応用を試みる。

３．研究の方法

まず、実解析的ジーゲル保型形式に対するフーリエ・ヤコビ展開についての予備研究として、Sp(2,R)のジーゲル極大放物部分群から誘導された主系列表現に対するフーリエ・ヤコビ型球関数の具体的決定について研究を行う。また、この研究を遂行するために Sp(n,R)や GL(n,C)の（一般）主系列表現に対するホイッタカー関数についての類似研究、GL(3,C)の主系列表現に対するホイッタカー関数の明示公式のゼータ積分による保型 L-関数への応用の研究もあわせて行う。

球関数の決定においては、それらが必要条件としてみたすホロノミック系微分方程式を動径成分の座標について書き下し、明示的にその解を構成することが肝要である。しかし、この証明に要する計算は複雑かつ多大であるので、類似する球関数の研究により新たな知見を獲得しつつ、本研究に援用し、遂行する。また、ホイッタカー関数の明示公式のゼータ積分による保型 L-関数への応用においては、これまでに得られているホイッタカー関数の明示公式がゼータ積分を明示的に評価するのに十分であるかどうかについて考察する必要がある。

４．研究成果

本研究課題の主たる研究対象である次数２の実シンプレクティック群 Sp(2,R)上のフーリエ・ヤコビ型球関数とその実解析的ジーゲル保型形式に対するフーリエ・ヤコビ展開への応用については、残念ながら成果をあげるには至らなかった。しかしながら、予備研究・類似研究として行った GL(3,C)の主系列表現に対するホイッタカー関数の新しい明示公式とそれを利用したゼータ積分の明示的評価については、満足いく成果をあげることができた。

以下、本研究にて得られた成果を具体的に説明する。次数３の複素一般線型群 GL(3,C)のクラス１でない主系列表現に対するホイッタカー関数の明示的決定は前回採択された課題における主結果の一つである。この明示公式においては主系列表現の極小 K-type に対する表現空間の基底としてゲルファン

ト・ツェルビンスキー基底を採用し、その基底に関するホイッタカー関数の成分関数をバーンズ積分によって表示していた。しかしながら、この明示公式によって GL(3)に対するランキン・セルバーグ型ゼータ積分を明示的に評価することは一般に困難であることが研究の過程で判明した。その困難さの理由は、極大コンパクト群のある部分群の作用によるベクトルの像がこの基底ではコントロールしにくいことにある。そこで、基底に対する成分関数としてホイッタカー関数を表示することにこだわらず、ゲルファント・ツェルビンスキー基底との明示的な関係を持つような極小 K-type のある生成系に対する成分関数としての新しい明示公式を示した。この明示公式はゲルファント・ツェルビンスキー基底に関するホイッタカー関数の成分関数表示と同様に扱いよいバーンズ積分によるものである。このホイッタカー関数の新しい明示公式についての結果とその応用であるGL(3)×GL(1)のランキン・セルバーグ型ゼータ積分の明示評価についての結果を、石井卓（成蹊大学理工学部）による GL(3,R)の主系列表現に対する成果および宮崎直（東京大学数理科学研究科）による GL(3,R)の一般主系列表現に対する成果と一緒にまとめ、学会発表（①・招待講演）を行い論文として出版した（①)。なお、ランキン・セルバーグ型ゼータ積分の評価についての結果は、ゼータ積分と対応する L-関数のガンマ因子との商の表示および局所関数等式であり、具体的なベクトルを用いない結果としてはジャッケおよびシャライカによって知られていたものである。我々の結果の新しいところはベクトルを指定して計算を実行したことであり、このような計算は明示公式の成果なしでは為しえないものであることに注意したい。計算の過程で本質的に用いられるのはバーンズの補題である：従って、より高階の群に対するゼータ関数の明示的評価においても、必要とされるホイッタカー関数の明示公式はバーンズ積分による表示であることが予想される。複素素点におけるゼータ関数の明示的評価は全ての場合を尽くしておらず、極小 K-type についての技術的な仮定を必要としたが、このことから分かるようにホイッタカー関数の明示公式からゼータ積分の評価への道のりは単純ではない。この研究に引き続き、GL(3)×GL(2)のランキン・セルバーグ型ゼータ積分の明示評価について研究を進めているが、本研究課題研究期間中においては部分的な結果のみを得た。

今後の研究課題としては、本研究において得られた成果およびその過程で得られた新しい知見を、ジーゲル極大放物部分群から誘導された主系列表現に対するフーリエ・ヤコビ型球関数の研究ならびに次数２の実解析的な非正則ジーゲル保型形式に対するフーリエ・ヤコビ展開の研究に援用しその研究を進展させること、予備研究の成果をさらに進展させ保型形式の L-関数の理論へ応用すること、特にGL(3)×GL(2)のランキン・セルバーグ型ゼータ積分の明示評価を完成させること、さらに高階代数群に研究対象を拡げ同様な考察をし得られている予想を証明すること、などが挙げられる。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計１件）

① Miki Hirano, Taku Ishii, Tadashi Miyazaki, The Archimedean Whittaker functions on GL(3), in “Geometry and analysis of automorphic forms of several variables” (2011) 77-109, World scientific, 査読有

〔学会発表〕（計１件）

① Taku Ishii, Miki Hirano, Tadashi Miyazaki, Archimedean Whittaker functions on GL(3), The

International Symposium “Geometry and analysis of automorphic forms of several variables”, 2009 年 9 月 17 日, 東京大学大学院数理科学研究科

６．研究組織

(1)研究代表者

平野　幹 (Hirano Miki)

愛媛大学・理工学研究科・教授

研究者番号：８０３１４９４６